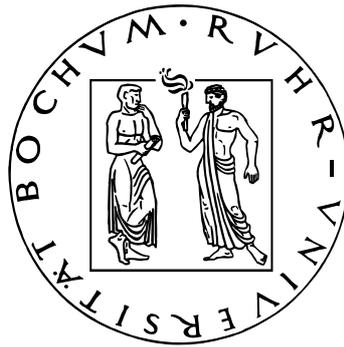


---

**Numerische Untersuchung der selbstkonsistenten  
Sphaleron-Konfiguration der elektroschwachen Theorie**

---



Lehrstuhl für Theoretische Physik II

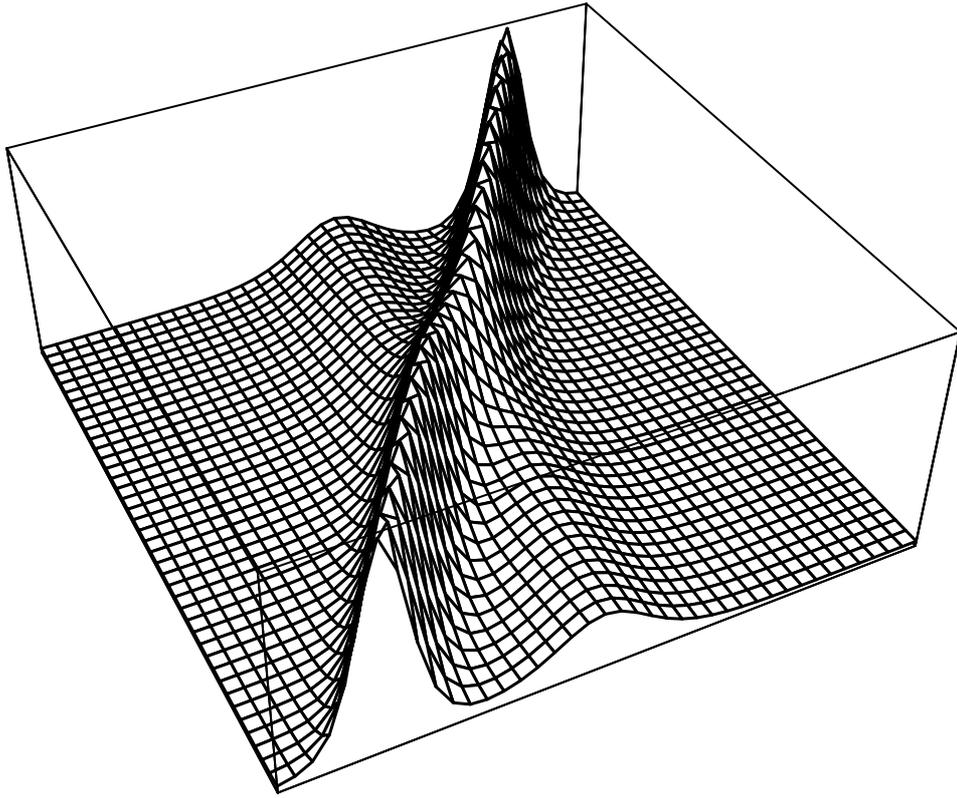
Diplomarbeit  
von  
Wolfram Schroers

Gutachter:

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfaßt zu haben und keine weiteren Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Wolfram Schroers

Dieses Dokument wurde mit dem Satzsystem  $\text{\TeX}$  und seinem Erweiterungspaket  $\text{\LaTeX}$  erstellt.



Towards the soliton!



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Das Modell und seine Parameter</b>	<b>5</b>
2.1. Die elektroschwache Wechselwirkung . . . . .	5
2.2. Das Sphaleron in der $SU(2)$ -Theorie . . . . .	6
2.3. Beiträge 1. Ordnung . . . . .	10
2.4. Verletzung der Baryonenzahl . . . . .	11
2.5. Fermionische Energie und Renormierung . . . . .	11
2.6. Die Renormierung der Parameter . . . . .	14
2.7. Die Feldenergie in 1-Loop-Näherung . . . . .	15
2.8. Minimierung bei konstantem $N_{CS}$ . . . . .	18
2.9. Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse . . . . .	19
<b>3. Numerische Minimierung</b>	<b>21</b>
3.1. Interpolation mit Hilfe von Splines . . . . .	21
3.2. Auswertung der fermionischen Energie . . . . .	23
3.2.1. Die Wahl der Größen $\Lambda$ und $z_{\max}$ . . . . .	24
3.2.2. Auswertung der Energien für unterschiedliche $K$ . . . . .	26
3.3. Repräsentation der Felder . . . . .	27
3.4. Minimierung einer $n$ -dimensionalen Funktion . . . . .	30
3.4.1. Minimierung einer 1-dimensionalen Funktion . . . . .	31
3.4.2. Das Powell-Verfahren . . . . .	32
3.5. Alternative numerische Methoden . . . . .	34
3.6. Zusammenfassung der numerischen Methoden . . . . .	36
<b>4. Ergebnisse</b>	<b>37</b>
4.1. Wahl des Renormierungspunktes $\nu_{\text{ren}}$ . . . . .	37
4.2. Minimierung des klassischen Funktionals . . . . .	38
4.2.1. Verifikation der Vakuumkonfiguration . . . . .	39
4.2.2. Verifikation der Sphaleronkonfiguration . . . . .	39
4.2.3. Minimierung aus verzerrter Anfangskonfiguration . . . . .	41
4.3. Minimierung des 1-loop-Funktional . . . . .	41
4.3.1. Vakuumkonfigurationen . . . . .	42
4.3.2. Das nicht-triviale Vakuum . . . . .	44
4.3.3. Sphaleronkonfigurationen . . . . .	44

4.4. Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	49
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>53</b>
<b>A. Notation</b>	<b>57</b>
A.1. Minkowski-Metrik . . . . .	57
A.2. Euklidische Metrik . . . . .	58
<b>B. Eigenwerte des Hamiltonoperators</b>	<b>59</b>
<b>C. Massenrenormierung</b>	<b>65</b>

# 1. Einleitung

Im Laufe des zwanzigsten Jahrhunderts sind viele entscheidende Entwicklungen in der Physik gelungen. Die vorher bekannte klassische Mechanik und die Elektrodynamik vermögen die makroskopischen Phänomene recht gut zu beschreiben, aber im Limes hoher Geschwindigkeiten bzw. Energien versagen sie genauso wie bei der Beschreibung mikroskopischer Phänomene. Diese Unzulänglichkeiten wurden durch die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik beseitigt. Gegenwärtig ist es aber noch nicht möglich, eine Theorie zu formulieren, die diese beiden Theorien miteinander vereinigt.

Bei der Beschreibung mikroskopischer Phänomene hat sich die Methode der Quantenfeldtheorien (QFT) als die erfolgreichste Beschreibung herausgestellt (siehe z. B. [1, 2, 3] u.a.). Dabei ist es notwendig, eine spezielle Funktion, die Lagrangedichte, zu postulieren und Werte für die dort auftretenden Parameter zu fordern. Die Auswahl dieser Lagrangedichte kann durch Forderungen hinsichtlich der Renormierbarkeit, der Endlichkeit und insbesondere durch Forderungen von Symmetrien eingeschränkt werden. Dementsprechend sinkt auch die Zahl der freien Parameter der Theorie.

Ausgehend von der Lagrangedichte ist es anschließend möglich, die Theorie zu quantisieren, wobei man sich entweder des kanonischen oder des Pfadintegralformalismus bedienen kann (siehe z. B. [4]). Hiervon ausgehend lassen sich dann beobachtbare Größen berechnen und mit dem Experiment vergleichen. Dann ist die Theorie ggf. zu variieren, oder sogar ganz zu verwerfen. Verifizieren läßt sie sich natürlich nicht. Weiterhin ist es unmöglich, eine Theorie zu finden, die auf mathematischen Axiomen aufbaut und alle Phänomene, die experimentell ergründet werden können, vollständig und widerspruchsfrei beschreibt (siehe [5]).

Aber bereits die Berechnungen innerhalb der Theorie können problematisch sein: die Feldtheorien behandeln mathematisch außerordentlich komplizierte Probleme, die bisher nicht vollständig analytisch gelöst werden können. Daher muß man sich damit begnügen, Näherungen zu verwenden, die die Theorie nicht vollständig charakterisieren, sondern nur in einem eingeschränkten Bereich gültig sein können. Eine beliebte Methode, Quantenfeldtheorien zu untersuchen, stellt die Störungstheorie dar. Dabei geht man von den freien Feldern (ohne Wechselwirkung) aus und addiert dann die Störungen in einer Potenzreihe in den Ordnungen der Kopplungskonstante. Dieses Verfahren kann natürlich nur dann funktionieren, wenn die Störungsreihe konvergiert und (was eine Voraussetzung hierfür ist) wenn die Kopplungskonstante hinreichend klein ist, so daß die Wechselwirkungsterme wirklich kleiner als die Terme für die freien Felder sind. In manchen Theorien ist dieser Punkt von vornherein nicht erfüllt (z. B. im Niederenergiebereich der Quanten-

chromodynamik), aber auch wenn dies der Fall ist, so wird die Störungsreihe i.a. nicht konvergieren. Dies ist für die älteste QFT, die Quantenelektrodynamik, in [6] bewiesen worden. Trotzdem erweist es sich als sinnvoll, diese Theorien perturbativ zu beschreiben, denn in niedrigen Ordnungen (gemeint sind hier Untersuchungen bis etwa zur 4. Ordnung) beschreibt die Theorie die Experimente hervorragend.

Eine wichtige Klasse von QFTs sind die sogenannten *nichtabelschen Eichtheorien*. Die ursprünglichen Arbeiten [7, 8] haben den Grundstein für unsere heutigen Theorien der Elementarteilchen gelegt. Die wichtigste Theorie ist das minimale Standardmodell, das die aktuellen Experimente vollständig zu beschreiben vermag und die minimale Menge an Eingabeparametern erfordert. Die Lagrangedichte ist invariant unter lokalen  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformationen und enthält ein komplexes Higgsdublett. Das Modell enthält eine Produktgruppe einer abelschen ( $U(1)_Y$ -Theorie) und einer nichtabelschen ( $SU(2)_L$ -Theorie), die man als den elektroschwachen Sektor bezeichnet (das sog. GSW-Modell). Bildet man das direkte Produkt aus dem GSW-Modell und der QCD (dem  $SU(3)_C$ -Teil), so erhält man das Standardmodell.

Im Rahmen der nicht-abelschen Eichtheorien gibt es — im Gegensatz zu den abelschen Theorien — eine Klasse von Effekten, die grundsätzlich nicht störungstheoretisch erfaßt werden können. Einen Ansatz zur Beschreibung dieser nichtperturbativen Effekte bilden die sog. Instantonen, die sich als Lösungen der klassischen Theorie manifestieren. Im Rahmen der quantisierten Theorie bleiben diese Effekte erhalten und können Aussagen über die Struktur der Feldtheorie liefern, die im Rahmen der Störungstheorie nicht erfaßbar wären. Da es sich um räumlich lokalisierte Phänomene handelt, werden diese Objekte als Solitonen bezeichnet.

In dieser Arbeit wird eine solitonische Lösung der nichtabelschen GSW-Theorie untersucht, das sog. *Sphaleron*. Mit Hilfe der Sphaleronlösung ist es möglich, auch im Rahmen des Standardmodells Verletzungen der Baryonenzahl zu erhalten, die damit zusammenhängen, daß eine Symmetrie der klassischen Feldtheorie (die Invarianz unter axialen Transformationen) nach der Quantisierung gebrochen wird. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als *Anomalie*, und im vorliegenden Fall handelt es sich um die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie (für eine Diskussion siehe z. B. [9]).

In der Literatur hat das Sphaleron der elektroschwachen Theorie schon oft im Mittelpunkt des Interesses gestanden (siehe die Literaturverweise in Kapitel 2). Insbesondere die Berechnung der Rate von baryonenzahlverletzenden Sphaleronübergängen wurde berechnet, zunächst klassisch, dann mit 1-loop-Korrekturen (siehe [10]). Dabei sind in der Arbeit [11] zum ersten Mal fermionische Quantenkorrekturen, die zu der klassischen Lösung hinzukommen, untersucht worden. Dabei handelt es sich um Korrekturen, die die Energie des Sphalerons um etwa 20 – 30% erhöhen. Diese Korrekturen wurden sowohl für Temperatur Null als auch im Fall endlicher Temperaturen ermittelt. Als Anwendung der Ergebnisse im Fall endlicher Temperaturen wurde später in [12] die Übergangsrate aufgrund baryonenzahlverletzender Prozesse (siehe Kapitel 2) im frühen Universum berechnet. Damit waren Rückschlüsse auf die Parameter des Standardmodells möglich geworden, insbesondere konnte für die Masse des Higgsbosons eine obere Schranke angegeben werden. In diesen Arbeiten ist allerdings nicht berücksichtigt worden, daß die fermionischen Korrekturen ebenfalls eine Renormierung der Massen erforderlich machen.

---

Außerdem sind die Korrekturen nur zu der klassischen Lösung hinzuaddiert worden, aber es ist durchaus möglich, daß die Lösung (wie später noch diskutiert wird, stellt das Sphaleron die Spitze des Pfades minimaler Energie bei einem Übergang zwischen zwei Vakua verschiedener Windungszahl dar) im Fall fermionischer Fluktuationen anders aussieht, da lediglich der klassische Anteil der Energie ohne die Fluktuationen selbst minimiert wurde.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu untersuchen, wie groß die Energie des Sphalerons ist, wenn man diese Punkte korrekt berücksichtigt. Es soll untersucht werden, wie die Energie des Sphalerons der elektroschwachen Theorie bei fermionischen Fluktuationen erster Ordnung aussieht. Falls sich herausstellt, daß sich durch eine selbstkonsistente Berechnung wesentlich andere Lösungen ergeben als die bisherigen Arbeiten gefunden haben (falls also die selbstkonsistente Lösung eine wesentlich tiefere Energie besitzt), so könnte dies zu einer merklichen Baryonenzahlverletzung führen, die vielleicht sogar einmal experimentell nachgewiesen werden kann. Dies könnte das bisherige Bild des SM deutlich beeinflussen.

Die Problematik dieser Aufgabe liegt darin, daß es nicht möglich ist, die selbstkonsistente Lösung auf analytischem Wege zu finden, ohne Näherungen vorzunehmen, die die Verlässlichkeit der Ergebnisse in Frage stellen. Andererseits war eine numerische Behandlung bisher nicht möglich, da die Rechenzeit für eine Auswertung der fermionischen Korrekturen bei mehr als einer Stunde auf den vorhandenen Computern lag. In Anbetracht der Tatsache, daß die Problemstellung eine Minimierung der Energie erfordert, wäre es notwendig, diese Auswertung mehrere tausend Male durchzuführen. Dies würde somit auf den heutigen Computern mehrere Jahre dauern. Das Hauptziel dieser Arbeit besteht also darin, die Auswertung der fermionischen Korrekturen wesentlich zu beschleunigen und die Zahl der Auswertungen möglichst gering zu halten.

Die Gliederung dieser Arbeit ist wie folgt: in Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen vorgestellt, angefangen vom zugrundeliegenden Modell bis hin zu den Energiefunktionalen der Theorie. In Kapitel 3 werden die Methoden und Verfahren vorgestellt, die eine Lösung des Problems in der Praxis ermöglichen sollen. In Kapitel 4 wird zunächst die Verlässlichkeit der Methoden untersucht und anschließend die eigentlichen Ergebnisse dieser Arbeit vorgestellt. Kapitel 5 schließlich faßt die Resultate zusammen und erläutert ihre Bedeutung im Hinblick auf die Resultate anderer Arbeiten. Darüber hinaus werden Perspektiven für künftige Forschungen aufgezeigt.



## 2. Das Modell und seine Parameter

Das Glashow-Salam-Weinberg Modell (siehe u.a. [3] und [2]), auch bekannt als der elektroschwache Teil des Standardmodells, ist eine Theorie zur einheitlichen Beschreibung der elektroschwachen Wechselwirkung. Es stellt eine nichtabelsche Eichtheorie dar, die invariant unter  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformationen ist. Im folgenden wird nur der  $SU(2)$ -Sektor der Theorie betrachtet, den man erhält, wenn man im GSW-Modell den Limes  $\sin \theta_W \rightarrow 0$  durchführt. Diese Einschränkung kann mit Blick auf [13] als gerechtfertigt angesehen werden. Dort wird gezeigt, daß die Unterschiede in den Ergebnissen der Rechnungen in der Größenordnung von  $\simeq 1\%$  sind.

### 2.1. Die elektroschwache Wechselwirkung

Die elektroschwache Wechselwirkung wird durch eine  $SU(2)$ -invariante Yang-Mills-Theorie beschrieben; ihr liegt folgende Lagrangedichte zugrunde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - \bar{\psi}_L M \psi_R - \bar{\psi}_R M^\dagger \psi_L \\ & - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{\lambda^2}{2} \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dabei ist die kovariante Ableitung  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$  mit  $A_\mu = \frac{1}{2}A_\mu^a \tau^a$  und der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \tau^a$ , wobei  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ . Die Massenmatrix  $M$  besteht aus den Komponenten des Higgsfeldes  $\Phi = (\Phi_0^+)$  und den Yukawakopplungskonstanten  $h_u$  und  $h_d$ ,

$$M = \begin{pmatrix} h_u \Phi^{0*} & h_d \Phi^+ \\ -h_u \Phi^{+*} & h_d \Phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Die  $SU(2)$  Fermion-Isospindoublets sind definiert mittels

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^u \\ \psi_L^d \end{pmatrix} \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \psi_R^u \\ \psi_R^d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Massen erhält man durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes  $\langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich auf 0-loop Niveau  $m_W = \frac{gv}{2}$ ,  $m_{u,d} = \frac{h_{u,d}v}{\sqrt{2}}$

sowie  $m_H = \lambda v$ . Die renormierten Massen auf 1-loop Niveau sind explizit in Anhang C aufgeföhrt und werden später für die Berechnungen der selbstkonsistenten Lösung benötigt. (2.1) beschreibt eine Yang-Mills-Theorie, die invariant ist unter lokalen  $SU(2)$ -Transformationen. Dabei sind die Felder wie folgt zu transformieren (es sei  $U(x) \in SU(2)$ ):

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ A_\lambda(x) &\rightarrow A'_\lambda(x) = U(x)A_\lambda(x)U^\dagger(x) + iU(x)\partial_\lambda U^\dagger(x) \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Man kann mit dimensionslosen Größen arbeiten, indem man folgende Skalierung vornimmt:

$$x^\mu \rightarrow m_W^{-1}x^\mu, \quad A_\mu^a \rightarrow m_W A_\mu^a, \quad \Phi \rightarrow \frac{m_W}{\sqrt{2}g}\Phi$$

Benutzt man ferner die Darstellung der Dirac Matrizen aus Anhang A, so können die Fermionenfelder auf zwei Komponenten reduziert werden:

$$\psi_L^{u,d} \rightarrow m_W^{3/2} \begin{pmatrix} \psi_L^{u,d} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R^{u,d} \rightarrow m_W^{3/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R^{u,d} \end{pmatrix}$$

Mit diesen Ersetzungen erhält man aus (2.1) als neuen Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & m_W^4 \left( i\psi_L^\dagger (D_0 - \sigma_i D_i) \psi_L + i\psi_R^\dagger (\partial_0 + \sigma_i \partial_i) \psi_R - \psi_L^\dagger M \psi_R - \psi_R^\dagger M^\dagger \psi_L \right. \\ & \left. + \frac{1}{g^2} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{1}{32} \nu_H^2 (\Phi^\dagger \Phi - 4)^2 \right) \right),\end{aligned}\tag{2.4}$$

wobei für die Massen gilt

$$M = \frac{1}{2m_W} \begin{pmatrix} m_u \Phi^{0*} & m_d \Phi^+ \\ -m_u \Phi^{+*} & m_d \Phi^0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \nu_H = \frac{m_H}{m_W}\tag{2.5}$$

Als Parameter werden in dieser Arbeit gewählt [2, 14]

$$g = 0.67, \quad m_W = 83\text{GeV}, \quad m_T = 175\text{GeV}$$

Die Higgsmasse wird als freier Parameter angesehen; es wird ein Ziel dieser Arbeit sein, die gesuchten Größen als Funktion der Higgsmasse zu untersuchen.

## 2.2. Das Sphaleron in der $SU(2)$ -Theorie

Im folgenden sollen statische Lösungen der Eich- und Higgsfelder in (2.4) betrachtet werden. Es erweist sich als sinnvoll, die temporale Eichung  $A_0 \equiv 0$  zu verwenden. Dadurch werden sämtliche Eichtransformationen zeitunabhängig. Damit erhält man aus (2.4) folgendes Energiefunktional

$$E_{\text{class}} = \frac{m_W}{g^2} \int d^3r \left( \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} + \frac{1}{2} (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) + \frac{1}{32} \nu_H^2 (\Phi^\dagger \Phi - 4)^2 \right)\tag{2.6}$$

Konfigurationen mit  $A_i^a = 0$  und  $\Phi^\dagger \Phi = 4$  haben eine Energie von Null, d. h. sie stellen eine Vakuumkonfiguration dar. Aufgrund der Transformationseigenschaften (2.3) kann man aber diese Konfiguration auf  $A_i = iU(r)\partial_i U^\dagger(r)$  (mit  $U(r) \in SU(2)$ ) transformieren, für die aufgrund der Eichinvarianz wieder  $E_{\text{class}} = 0$  gelten muß. Diese Felder lassen sich durch das folgende Funktional (genannt Chern-Simons-Index) charakterisieren (siehe [3]):

$$N_{\text{CS}} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3 r \epsilon^{ijk} \left( A_i^a \partial_j A_k^a + \frac{1}{3} \epsilon^{abc} A_a^i A_b^j A_c^k \right) \quad (2.7)$$

Man kann zeigen, daß für reine Eichfelder der Form  $A_i = iU(r)\partial_i U^\dagger(r)$  gilt:

$$N_{\text{CS}} \in \mathbf{Z}$$

Man unterscheidet dann physikalisch äquivalente (Energie 0), aber topologisch unterschiedliche Vakua mit  $N_{\text{CS}} = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Wenn  $N_{\text{CS}}$  nicht ganzzahlig ist, dann liefert (2.6) eine Energie  $E_{\text{class}} > 0$ . Somit ist es nicht möglich, Vakua mit unterschiedlichem  $N_{\text{CS}}$  durch stetige Deformation ineinander zu überführen, ohne den Vakuumzustand zu verlassen, d. h. die einzelnen Vakua sind durch eine hohe Potentialbarriere voneinander getrennt. Eine Konstruktion des Pfades minimaler Energie wurde in [15] vorgenommen.

Abbildung 2.1 zeigt diese Pfade minimaler Energie. Punkte, die durch die Eichfelder erreicht werden können, sind in der Grafik grau dargestellt, wohingegen der Bereich, der für die Feldkonfigurationen verboten ist, weiß dargestellt ist.

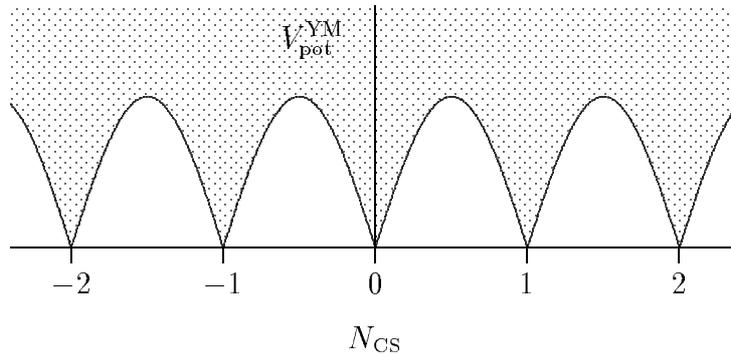


Abbildung 2.1.: Mögliche Konfigurationen der Eichfelder liefern Punkte im grauen Bereich. Nichterreichbare Punkte sind weiß gezeichnet. Die Grenzlinie ist der Pfad minimaler Energie. Die Ordinate ist ohne physikalische Einheit gezeichnet.

Unter normalen Bedingungen (heutige Temperatur und heutige Teilchendichten) ist die Wahrscheinlichkeit, die Barriere durch Tunneln zu überwinden, extrem klein: in der WKB-Näherung (siehe [16]) ist sie durch  $e^{-2S}$  gegeben, wobei  $S = 8\pi^2/g^2$  die Instantonwirkung ist. Wenn jedoch die Teilchendichte sehr groß wird, besteht die Möglichkeit, die Barriere zu durchtunneln, während bei hohen Temperaturen klassische Übergänge

aufgrund thermischer Fluktuationen möglich sind (siehe [11]). Es könnte ferner möglich sein, solche Prozesse an Teilchenbeschleunigern bei entsprechend hohen Energien nachzuweisen. Dazu müßten die Energien der Teilchen bei etwa 10 – 100TeV liegen (siehe [17, 18, 19, 20]).

Aufgrund einer Anomalie der Baryonen- und Leptonenströme [21] ist die Baryonen- und Leptonenzahl auch im Standardmodell nicht erhalten:

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{N_g}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \quad (2.8)$$

wobei  $N_g = 3$  die Anzahl der Fermion-Generationen ist. Im Falle eines nicht-verschwindenden Weinbergwinkels ( $\sin\theta_W \neq 0$ ) wird hierzu noch ein Anteil des  $U(1)$ -Eichfeldes kommen. Durch Integration dieser Anomalie-Gleichung kann man folgern, daß jede Änderung von  $N_{CS}$  eine Änderung der Baryonen- und Leptonenzahl bewirkt [11]:

$$\Delta B = \Delta L = N_g \Delta N_{CS} \quad (2.9)$$

Um die Übergangsrate zu berechnen (z. B. für die Verletzung der Baryonenzahl aufgrund thermischer Fluktuationen), benötigt man den Pfad minimaler Energie bei einem Übergang von  $N_{CS} = 0$  nach  $N_{CS} = 1$ . Diesen erhält man, indem man die Energie (2.6) für festes  $N_{CS}$  minimiert. Die Konfiguration für  $N_{CS} = 1/2$  stellt den höchsten Punkt dar und wird *Sphaleron* genannt. Dieser Punkt ist ein Sattelpunkt im Raum der Eich- und Higgsfelder (mit unendlich vielen Freiheitsgraden). Es gibt nur einen negativen Eigenmode in Richtung des sich ändernden  $N_{CS}$ . Da diese Konfiguration im Raum der Eich- und Higgsfelder bereits einen hohen Symmetriegrad besitzt, liegt es nahe, als Ansatz sphärisch symmetrische Felder [15, 11, 22, 9] zu wählen, welchen man auch als „Hedgehog“-Ansatz bezeichnet:

$$\begin{aligned} A_i^a(\mathbf{r}) &= \epsilon_{aij} n_j \frac{1 - A(r)}{r} + (\delta_{ai} - n_a n_i) \frac{B(r)}{r} + n_a n_i \frac{C(r)}{r} \\ \Phi(\mathbf{r}) &= 2(H(r) + iG(r)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$  ist und  $\boldsymbol{\tau}$  die Paulimatrizen sind. Damit sind alle möglichen Feldkonfigurationen durch die Funktionen  $A, B, C, G$  und  $H$  zu beschreiben. Alle Eichtransformationen, die die sphärische Symmetrie erhalten sind nun von der Form

$$U(\mathbf{r}) = \exp(iP(r)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad (2.11)$$

wobei  $P(r)$  eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Die Transformation (2.3) hat dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} A(r) &\rightarrow A(r) \cos 2P(r) - B(r) \sin 2P(r) \\ B(r) &\rightarrow B(r) \cos 2P(r) + A(r) \sin 2P(r) \\ C(r) &\rightarrow C(r) + 2rP'(r) \\ G(r) &\rightarrow G(r) \cos P(r) + H(r) \sin P(r) \\ H(r) &\rightarrow H(r) \cos P(r) - G(r) \sin P(r) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die klassische Energie (2.6) hat dann in den Feldern  $A, B, C, G$  und  $H$  die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{class}} = & \frac{4\pi m_W}{g^2} \int_0^R dr \left( \left( A' + \frac{BC}{r} \right)^2 + \left( B' + \frac{AC}{r} \right)^2 \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{A^2 + B^2 - 1}{r} \right)^2 + 2r^2 (H'^2 + G'^2) \\
 & + 2r (H'G - G'H) C - 4BGH + 2A (G^2 - H^2) \\
 & \left. + \left( 1 + A^2 + B^2 + \frac{1}{2}C^2 \right) (G^2 + H^2) + \frac{\nu_H^2}{2} r^2 (G^2 + H^2 - 1)^2 \right) \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Für  $N_{\text{CS}}$  erhält man folgende Gestalt:

$$N_{\text{CS}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr \left( \frac{(A^2 + B^2 - 1)C}{r} + (A'B - B'A) + B' \right) \quad (2.14)$$

An die Funktionen  $A, B, C, G$  und  $H$  sind noch weitere Bedingungen zu stellen, damit die Funktionale (2.13) und (2.14) überhaupt existieren und definiert sind. Es ist klar, daß im Limes  $r \rightarrow \infty$  die Felder ihren Vakuum Erwartungswert annehmen müssen. Damit  $A_i, \Phi$  im Ursprung stetig und differenzierbar sind, muß man folgern, daß für  $r \rightarrow 0$  die Felder folgende Grenzwerte haben müssen:

$$A(0) = 1, \quad B(0) = 0, \quad C(0) = 0 \quad \text{sowie} \quad G(0) = 0 \quad (2.15)$$

Die Vakuum Erwartungswerte sind (in trivialer Eichung):

$$A(\infty) = 1, \quad B(\infty) = 0, \quad C(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0 \quad \text{sowie} \quad H(\infty) = 1 \quad (2.16)$$

Zur Bestimmung des Pfades minimaler Energie ist es möglich, die Bewegungsgleichungen des Feldes, die sich mit

$$\frac{\delta E_{\text{class}}}{\delta X(r)} = 0 \quad \text{mit} \quad X = A, B, C, G, H$$

ergeben, numerisch zu integrieren. Dies ist in [11] durchgeführt worden. In dieser Arbeit wird aber auch ein Verfahren vorgestellt, das ohne Bestimmung der Ableitungen von (2.13) auskommt und die Felder durch Minimierung der Energie bestimmt.

Es ist noch wichtig anzumerken, daß die Felder aus (2.10) ja immer noch eine Transformation der Form (2.11) zulassen; somit enthält die Theorie in der beschriebenen Form immer noch einen Eichfreiheitsgrad. Allerdings muß die Transformation gewährleisten, daß die Randbedingungen (2.15) und (2.16) erfüllt sind. Praktisch bedeutet dies, daß man das Feld  $C(r)$  vorgeben kann bzw. auf nur einen Parameter reduzieren kann (z. B. ein Parameter  $\alpha$  der Form  $C(r) = \alpha \bar{C}(r)$ ). Als Nebenbedingung für die Wahl von  $C(r)$  ist zu stellen, daß nach der Transformation die Randbedingungen noch erfüllt sind. Außerdem ist die Minimierung so durchzuführen, daß (2.15) und (2.16) nicht verletzt werden können.

### 2.3. Beiträge 1. Ordnung

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf die klassischen Felder, d. h. alle Quanteneffekte wurden vernachlässigt. Nun sollen Quantenfluktuationen ermittelt werden. In dieser Arbeit werden die Untersuchungen auf fermionische Korrekturen in 1. Ordnung bei Temperatur  $T = 0$  beschränkt, um den numerischen Aufwand in überschaubaren Größenordnungen halten zu können. Die später beschriebenen Verfahren können aber genauso auf bosonische Anteile und Felder bei endlichen Temperaturen erweitert werden. Die fermionischen Anteile von (2.4),

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = i\psi_L^\dagger(D_0 - \sigma_i D_i)\psi_L + i\psi_R^\dagger(\partial_0 + \sigma_i \partial_i)\psi_R - i\psi_L^\dagger M\psi_R - i\psi_R^\dagger M^\dagger\psi_L, \quad (2.17)$$

liefern nach einer funktionalen Ableitung von  $\mathcal{L}_{\text{ferm}}$  nach den Fermionfeldern die Dirac-Gleichung

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}\right)\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} = 0, \quad (2.18)$$

wobei  $\mathcal{H}$  wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} i\sigma_i D_i & M \\ M^\dagger & -i\sigma_i \partial_i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Da die bisherigen Rechnungen statische Felder vorausgesetzt haben und somit nur zeitunabhängige fermionische Eigenzustände wesentlich sind, ist die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R\end{pmatrix} \quad (2.20)$$

zu lösen. Aus den Energieeigenwerten, die sich als Lösung von (2.20) ergeben, läßt sich dann der Energiebeitrag des Dirac-Sees berechnen. Allerdings würde die Massenmatrix aus (2.5) die sphärische Symmetrie von  $\mathcal{H}$  verletzen, wonach  $\mathcal{H}$  nicht mehr mit dem Grand-Spin-Operator  $\hat{\mathbf{K}}^2$  (s.u.) vertauschen würde. Dadurch wäre der folgende Formalismus nicht mehr anwendbar. Daher soll hier die Vereinfachung gemacht werden, daß die Fermiondoublets bezüglich ihrer Masse entartet sind. Diese Näherung ist gerechtfertigt im Falle der Leptonen- und der  $u$ ,  $d$ ,  $c$  und  $s$ -Quarks, gilt aber nicht mehr im Falle des  $b$  und  $t$ -Doublets. Um auch diesen Fall handhaben zu können, wird auf das Verfahren von [11] zurückgegriffen und die Berechnung für  $3/2$  massive und  $9 + 3/2$  masselose Fermion-Doublets durchgeführt. Ein besserer Ansatz, bei dem die Massenaufspaltung störungstheoretisch berücksichtigt wird, wird in [22] aufgezeigt. Allerdings erkauft man sich dieses bessere Verfahren durch einen stark erhöhten numerischen Aufwand, der eine Behandlung in dieser Arbeit unmöglich machen würde. Deshalb soll darauf an dieser Stelle verzichtet werden.

Mit den genannten Vereinfachungen erhält man als Massenmatrix

$$M_0 = \frac{1}{2}\nu_F \begin{pmatrix} \Phi^{0*} & \Phi^+ \\ -\Phi^{+*} & \Phi^0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

wobei  $\nu_F$  eine gemeinsame Masse innerhalb des Dubletts darstellen soll. Sinnvoll erscheint beispielsweise die Gesamtmasse  $\nu_F = \nu_u + \nu_d$ , wobei dann als Masse der massiven Dubletts (von denen  $3/2$  existieren) die Masse des Topquarks  $m_F = m_T = 175\text{GeV}$  (siehe z. B. [14]) verwendet wird, und sonst die Masse  $m_F = 0$ .

In den Feldern des „Hedgehog“- Ansatzes (2.10) lauten  $M_0$  und  $M_0^\dagger$

$$\begin{aligned} M_0 &= \nu_F (H + i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})G) \\ M_0^\dagger &= \nu_F (H - i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})G) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Zur Lösung der Eigenwertgleichung (2.20) ist der Hamiltonoperator (2.19) in einer konkreten Basis zu diagonalisieren. Wie dies zu bewerkstelligen ist, wird in Anhang B durchgeführt. Für das Folgende werden die sich hierbei ergebenden Eigenwerte mit  $\varepsilon_\lambda$  bezeichnet; die Eigenwerte, die sich im Vakuum ergeben (des freien Hamiltonoperators), werden mit  $\varepsilon_\lambda^{(0)}$  bezeichnet.

Es zeigt sich, daß der Beitrag der masselosen Dubletts nur etwa  $\simeq 10\%$  des Beitrages des massiven Dubletts ist [11]. Daher werden in dieser Arbeit die masselosen Fermionen vernachlässigt.

Somit hat die Theorie die folgenden freien Parameter: die schwache Kopplungskonstante  $g$ , den Higgsparameter  $\nu_H$ , den fermionischen Massenparameter  $\nu_F$  und die Energieskala  $m_W$ , die natürlich auf den gemessenen Wert der  $W$ -Bosonmasse  $m_W = 83\text{GeV}$  anzupassen ist.

## 2.4. Verletzung der Baryonenzahl

Man kann numerisch die Energien  $\varepsilon_\lambda$  als Funktion von  $N_{\text{CS}}$  im Intervall von  $[0; 1]$  darstellen. Dies ist in Abbildung 2.2 geschehen. Das Verhalten des Valenzniveaus wurde zum ersten Mal in [23] demonstriert. Die Verletzung der Baryonenzahl, die bei einem solchen Übergang stattfindet, wird sofort am diskreten Valenzniveau für den Grandspin  $K = 0$  (Definition siehe Anhang B) sichtbar, dessen Energie mit  $\varepsilon_{\text{val}}$  bezeichnet werden soll. Zunächst ist für  $N_{\text{CS}} = 0$  das Spektrum symmetrisch. Alle unteren Niveaus sind besetzt, alle oberen unbesetzt. Jedes Niveau ist zweifach entartet. Erhöht man nun  $N_{\text{CS}}$ , so wird die Entartung aufgehoben. Dabei wandert das oberste Niveau des Dirac-Sees nach oben, durchquert die Massenslücke vollständig und erreicht bei  $N_{\text{CS}} = 1$  schließlich die Stelle des niedrigsten Niveaus im oberen Bereich. Dabei bleibt es jedoch die ganze Zeit besetzt, d. h. im Endzustand ist ein Fermion erzeugt worden. Aus Abb. 2.2 wird ebenfalls deutlich, daß die anderen Niveaus sich ebenfalls geringfügig nach oben bewegt haben, wobei jedes seinen Vorgänger ersetzt. Dabei sind die beiden Vakua physikalisch äquivalent. Somit ist in der Tat hier erkennbar, daß ein solcher Übergang die Baryonenzahl verletzt.

## 2.5. Fermionische Energie und Renormierung

Nun ist der gesamte Energiebeitrag  $E_{\text{ferm}}$  der Fermionen zu berechnen. Das Ziel ist es, ein Funktional zu erhalten, das die Feldenergie beschreibt und fermionische Korrekturen 1. Ordnung enthält. Es gilt also, (2.6) für diesen Fall zu erweitern.

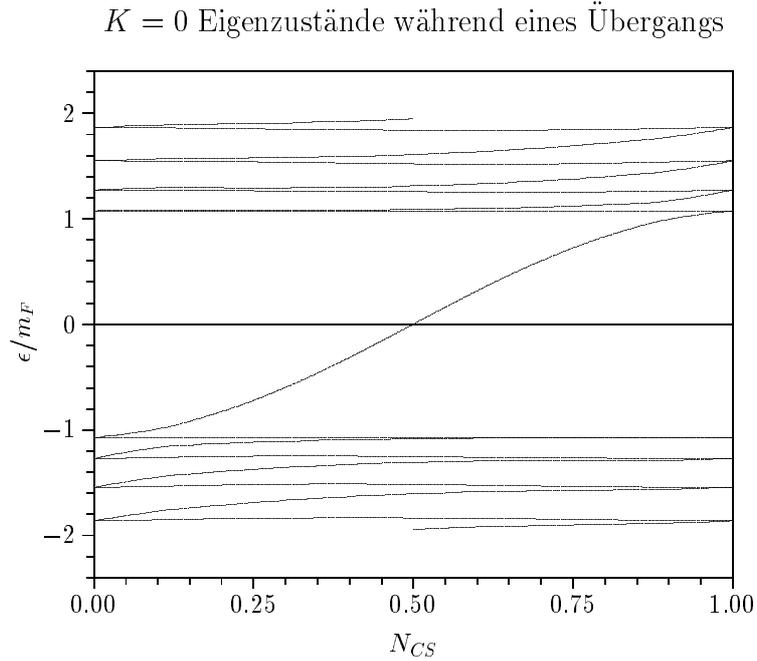


Abbildung 2.2.: Der Eigenwert  $\varepsilon_{\text{val}}$  und einige diskretisierte Eigenzustände als Funktion von  $N_{\text{CS}}$  mit  $m_F = m_W$ . Jedes Niveau bewegt sich nach oben und nimmt schließlich die Stelle seines Vorgängers ein.

Die Energie  $E_{\text{ferm}}$  ist einfach gegeben durch die Summe der Energien aller besetzten Zustände, von der ihr Wert im trivialen Vakuum bei  $N_{\text{CS}} = 0$  abzuziehen ist. Bezeichnet man wie oben das Energieniveau, das die Massenlücke durchquert, mit  $\varepsilon_{\text{val}}$ , so erhält man

$$E_{\text{ferm}} = m_W \sum_{\lambda, \varepsilon_{\lambda}^{(0)} < 0} (\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda}^{(0)}) = m_W \left( \sum_{\lambda, \varepsilon_{\lambda} < 0} \varepsilon_{\lambda} - \sum_{\lambda, \varepsilon_{\lambda}^{(0)} < 0} \varepsilon_{\lambda}^{(0)} + \varepsilon_{\text{val}} \theta(\varepsilon_{\text{val}}) \right) \quad (2.23)$$

Nutzt man die Tatsache aus, daß jedes Niveau  $\varepsilon_{\lambda}$  auch im oberen Kontinuum vorkommt (mit entgegengesetztem Vorzeichen), kann der erste Teil von (2.23), der ab jetzt mit  $E_{\text{Sea}}$  bezeichnet werden soll, auch folgendermaßen berechnet werden:

$$E_{\text{Sea}} = -\frac{m_W}{2} \left( \sum_{\lambda} |\varepsilon_{\lambda}| - \sum_{\lambda} |\varepsilon_{\lambda}^{(0)}| \right) \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$E_{\text{ferm}} = E_{\text{Sea}} + m_W \varepsilon_{\text{val}} \theta(\varepsilon_{\text{val}}) \quad (2.25)$$

Die Summe über  $\lambda$  in (2.24) läuft über alle Energieeigenzustände (deren Energien nicht notwendigerweise verschieden sind). Allerdings ist dieser Beitrag divergent. Andererseits

ist jedoch die Energie (2.4) renormierbar, weil sie aus der elektroschwachen Theorie abgeleitet wurde, die ebenfalls renormierbar ist (siehe z. B. [3, 2]). Um die Renormierung durchzuführen, soll hier das sog. Propertime-Schema angewendet werden, das die Ultraviolettdivergenz (d. h. Divergenz durch hohe Impulse) durch einen Cutoff-Parameter  $\Lambda$  unterdrückt. Damit folgt für die Energie aus (2.24)

$$E_{\text{Sea}}(\Lambda) = \frac{m_W}{4\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \text{Tr} \left( e^{-t\mathcal{H}^2} - e^{-t\mathcal{H}^{(0)2}} \right) \quad (2.26)$$

Im Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  divergiert (2.26) und ergibt den Ausdruck (2.24). Um diese Divergenz zu isolieren und (2.26) zu einem wohldefinierten Ausdruck zu machen, wird das Integral in zwei Teile aufgeteilt; dazu wird ein Renormierungspunkt  $\nu_{\text{ren}}$  gewählt:

$$\int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} = \int_{\Lambda^{-2}}^{\nu_{\text{ren}}^{-2}} + \int_{\nu_{\text{ren}}^{-2}}^{\infty} \quad (2.27)$$

Dabei sollten sich hinterher die physikalischen Observablen als unabhängig von der Wahl von  $\nu_{\text{ren}}$  erweisen; dies ist auch mit hoher Genauigkeit erfüllt (siehe Kapitel 4). Daß die Abhängigkeit nicht vollständig verschwindet, liegt darin begründet, daß hier nur Störungstheorie in 1. Ordnung betrieben wird und eine Unabhängigkeit nur bei exakter Behandlung vorliegt. Wenn noch eine geringe Abhängigkeit (wie in diesem Fall) vorliegt, dann wählt man i. a. den Renormierungspunkt in der Größenordnung der physikalischen Energie der anderen Parameter (also in diesem Fall der Masse  $m_W$  des  $W$ -Bosons).

Die divergenten Anteile des Integrals in (2.26) können ausgerechnet werden, indem die  $e$ -Funktion im zweiten Integral in (2.27) entwickelt und nur die divergenten Ordnungen in  $t$  berücksichtigt. Damit folgt:

$$\begin{aligned} E_{\text{div}}(\Lambda) &= \frac{m_W}{32\pi^2} \int d^3r \left( \nu_{\text{ren}}^2 - \Lambda^2 \right) \nu_F^2 \left( \Phi^\dagger \Phi - 4 \right) \\ &\quad + \ln \frac{\Lambda^2}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( \frac{1}{6} \left( F_{ij}^a \right)^2 + \nu_F^2 (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \nu_F^4 \left( \left( \Phi^\dagger \Phi - 4 \right)^2 + 8 \left( \Phi^\dagger \Phi - 4 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Anteile stimmen mit denen aus der klassischen Energie (2.6) überein, jedoch sind die Vorfaktoren jetzt divergente Größen. Daher kann man die entsprechenden Terme kombinieren und neue, renormierte Größen in (2.6) einführen. Man ersetzt in dieser Gleichung also einfach nur  $g$  durch  $g^{\text{ren}}$ ,  $\Phi$  und  $A_\mu$  durch  $\Phi^{\text{ren}}$  und  $A_\mu^{\text{ren}}$  sowie  $\nu_X$  durch  $\nu_X^{\text{ren}}$  (mit  $X = H, F$ )<sup>1</sup>. Diese neuen Größen werden den „gemessenen“ Werten angepaßt, also z. B.  $g^{\text{ren}} = 0.67$ .

Die fermionische Energie wird somit insgesamt zu

$$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (E_{\text{Sea}}(\Lambda) - E_{\text{div}}(\Lambda)) \quad (2.29)$$

Dieser Ausdruck ist nun unabhängig vom Cutoff-Parameter und stellt den gesuchten fermionischen Beitrag dar.

<sup>1</sup>Es ist selbstverständlich hinterher trotzdem noch nötig, die Higgs- und Topmassen für die fermionischen Korrekturen zu renormieren. Die dort gemachten Anmerkungen setzen aber bereits die hier vorgenommene Bezeichnung voraus.

## 2.6. Die Renormierung der Parameter

Zwar hat die fermionische Energie nun einen definierten Wert, allerdings erfahren alle Parameter der Theorie durch die fermionischen Korrekturen ebenfalls eine Änderung. Diese Massenrenormierung stellt das Ziel dieses Abschnitts dar.

Das Vakuum-Vakuum-Funktional des Fermionenfeldes lautet im Euklidischen:

$$W_E[\bar{\eta}, \eta, j_A, j_\phi] = \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi e^{-S_0[\bar{\psi}, \psi, A, \phi] + \int (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + j_A A + j_\phi \phi) d^4x}$$

Entwicklung um den stationären Punkt (siehe z. B. [24])

$$\frac{\delta}{\delta X} \left( -S_0[\bar{\psi}, \psi] + \int (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + j_A A + j_\phi \phi) d^4x \right) \equiv 0 \quad \text{mit } X = \psi, \bar{\psi}, A, \phi$$

liefert:

$$\begin{aligned} W_E[\bar{\eta}, \eta, j_A, j_\phi] &= \ln \int \mathcal{D}\bar{\chi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}a \mathcal{D}\xi \exp \left( -S_0[\bar{\psi}, \psi, A, \phi] \right. \\ &\quad \left. + \int (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + j_A A + j_\phi \phi) d^4x - \bar{\chi} \mathcal{H} \chi + \dots \right) \\ &= -S_0[\bar{\psi}, \psi, A, \phi] + \int (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + j_A A + j_\phi \phi) d^4x \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei hier nur die fermionischen Fluktuationen in 2. Ordnung berücksichtigt wurden ( $\mathcal{H}$  ist in Gleichung (2.19) definiert).

Legendre-Transformation liefert:

$$S_{\text{eff}} = \int (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta + j_A A + j_\phi \phi) - W = S_0[\bar{\psi}, \psi, A, \phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}) \quad (2.31)$$

Die Terme lassen sich ausrechnen und ihr konkretes Aussehen wird in Anhang C vorgestellt. Es sollte noch erwähnt werden, daß in erster Ordnung die Kopplungskonstante  $g$  keine Korrektur erfährt, also  $g^{\text{bare}} = g^{\text{ren}}$  gilt. Mit den Ausdrücken aus Anhang C ist es möglich, die Greenspropagatoren der  $W$ -Bosonen, des Higgsteilchens und der Fermionen zu berechnen. Die Pole der Propagatoren liefern dann die Massen der Teilchen. Der Zusammenhang zum Greenspropagator z. B. für Fermionen ist wie folgt:

$$S_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-k) G^{-1}(k) \psi(k), \quad (2.32)$$

wobei  $\psi(k)$  das impulsabhängige, fouriertransformierte Feld ist:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \psi(k) e^{-ikx}$$

Der Zusammenhang mit der Teilchenmasse ergibt sich zu:

$$G^{-1}(k; g, \nu_{\text{ren}}, \nu_F, \nu_H, v) \Big|_{k=m_{\text{phys}}} \equiv 0 \quad (2.33)$$

In (2.33) ist noch einmal deutlich ausgeschrieben worden, daß die Propagatoren ebenfalls von den im Lagrangian stehenden Parametern abhängen. Da diese keine direkte physikalische Bedeutung haben, werden sie auch als „bare“-Parameter bezeichnet.

Der Parameter  $v$  der Gleichung (2.33) wird über eine weitere Gleichung eliminiert. Diese wird in Kapitel 2.7 ausführlich diskutiert.

Insgesamt gibt es für die drei Teilchensorten ( $W$ - und Higgsbosonen sowie massives Fermiondublett) drei Gleichungen der Form (2.33). Eine dieser Gleichungen wird benutzt, um die Massenskala des Systems festzulegen. Sinnvollerweise wählt man hierfür die Gleichung für  $m_W$ . Dann bleiben noch zwei Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned} m_H &= m_H(\nu_{\text{ren}}, \nu_F, \nu_H) \\ m_F &= m_F(\nu_{\text{ren}}, \nu_F, \nu_H) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dieses Gleichungssystem ist überbestimmt, d. h. wir können einen Parameter frei wählen. In der Regel wählt man den Renormierungspunkt frei, wobei anschließend zu zeigen ist, daß die physikalischen Ergebnisse unabhängig von der Wahl von  $\nu_{\text{ren}}$  sind.

Die Gleichungen (2.34) können numerisch ausgewertet werden und man erhält als Ergebnis  $\nu_F$  und  $\nu_H$ . Damit sind die notwendigen Mittel gegeben, um das gesuchte Energiefunktional aufzustellen.

## 2.7. Die Feldenergie in 1-Loop-Näherung

Bevor das resultierende Funktional aufgestellt werden soll, ist zunächst der Vakuumerwartungswert  $v$  des Higgs-Feldes zu untersuchen. Im rein klassischen Fall wird aus (2.6) im Vakuum ( $F_{ij}^a \equiv 0$ ,  $\Phi = \text{const}$ ) einfach:

$$E_{\text{class}}[F_{ij}^a = 0, \Phi = \text{const}] = \frac{m_W \nu_H^2}{g^2} \int d^3 r (\Phi^\dagger \Phi - 4)^2 \quad (2.35)$$

Differenziert man diesen Ausdruck und setzt ihn gleich Null, so erhält man den Vakuumerwartungswert:

$$\frac{\delta E_{\text{class}}}{\delta(\Phi^\dagger \Phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei} \quad \Phi^\dagger \Phi = 4$$

Der Vakuumerwartungswert auf 0-Loop-Niveau ist somit  $v^2 = 4$ . Um den Wert  $v_1$  in 1-Loop-Näherung zu ermitteln, ist es nötig, den Wert der Fermionenenergie im Vakuum zu kennen. Dieser ist

$$\begin{aligned} E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}[F_{ij}^a = 0, \Phi = \text{const}] &= \frac{m_W N_c}{32\pi^2} \int d^3 r \left( -\nu_F^2 \nu_{\text{ren}}^2 \Phi^\dagger \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_F^2 (\Phi^\dagger \Phi)^2}{8} \left( \frac{3}{2} - C - \ln \left( \frac{\nu_F^2 \Phi^\dagger \Phi}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Durch Ableitung erhält man hier:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(E_{\text{class}} + E_{\text{ferm}}^{\text{ren}})}{\delta(\Phi^\dagger\Phi)} &= \frac{m_W}{g^2} \left( \frac{\nu_H^2}{16} (\Phi^\dagger\Phi - 4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_c g^2}{32\pi^2} \left( -\nu_F^2 \nu_{\text{ren}}^2 + \frac{\nu_F^4 \Phi^\dagger\Phi}{4} \left( 1 - C - \ln \left( \frac{\nu_F^2 \Phi^\dagger\Phi}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich 0, so findet man für  $v_1^2 = \Phi^\dagger\Phi$  die folgende Bestimmungsgleichung:

$$v_1^2 - 4 = -\frac{N_c g^2}{2\nu_H^2 \pi^2} \left( -\nu_F^2 \nu_{\text{ren}}^2 + \frac{\nu_F^4 v_1^2}{4} \left( 1 - C - \ln \left( \frac{\nu_F^2 v_1^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right) \quad (2.37)$$

Diese Gleichung ist für gegebene  $\nu_F$ ,  $\nu_H$  und  $\nu_{\text{ren}}$  numerisch zu lösen. Es ist anzumerken, daß diese Größe scheinbar von  $\nu_{\text{ren}}$  abhängt. Durch die Renormierung der Massenskala verschwindet diese Abhängigkeit jedoch wieder (s.o.). Da (2.37) in grober Näherung eine nach unten geöffnete Parabel darstellt, kann es sein, daß u. U. gar keine Lösung existiert. In einem solchen Fall ist es nötig, einen anderen Renormierungspunkt  $\nu_{\text{ren}}$  zu wählen<sup>2</sup>. Ansonsten hat (2.37) entweder eine oder zwei Lösungen im positiven Bereich.

Allerdings ist nur die niedrigere der beiden Lösungen der gesuchte Vakuum Erwartungswert. Abbildung 2.3 zeigt eine Schar von Kurven des Higgsfeldes für verschiedene Higgsmassen  $m_H$ . Im 1-loop-Fall ist das effektive Potential gegeben durch (2.35), wozu ebenfalls (2.36) zu addieren ist.

Die durchgezogene Kurve stellt den Fall  $m_H = 0.7m_F$  dar. Es ist ersichtlich, daß die Higgsmasse groß genug ist, um das Vakuum zu stabilisieren, und es zeigt sich eine ähnliche Kurve wie in der  $\phi^4$ -Theorie (siehe z. B. [2]), wenn auch schon mit geringen Korrekturen. Läßt man nun  $m_H$  kleiner werden, so wird die Kurve nach außen hin flacher verlaufen (was man auch aus (2.37) ablesen kann). Die gestrichelte Kurve zeigt diesen Fall bei einer Masse von  $m_H = 0.46m_F$ . Im Fall sehr kleiner Higgsmassen wird schließlich der Anteil  $\propto -(\Phi^\dagger\Phi)^2 \ln(\Phi^\dagger\Phi)$  in (2.37) dominieren und für steigende  $\Phi$  sehr große negative Beiträge liefern. Dieser Fall tritt z. B. für  $m_H = 0.42m_F$  ein und ist in Abbildung 2.3 als strichpunktierte Kurve dargestellt. Das effektive Potential geht gegen  $-\infty$ , womit das physikalische Vakuum instabil wäre. Da die Fermionenmasse konstant, die Higgsmasse jedoch unbekannt ist, kann man aus dieser Beobachtung eine untere Grenze für die Higgsmasse ableiten. Ist die Higgsmasse zu klein, so wird der fermionische Anteil dominieren, und das Vakuum ist instabil. Für hinreichend große Massen bleibt das Vakuum jedoch stabil.

Somit hat im Fall von 2 Lösungen nur die niedrigere Lösung von (2.37) eine Bedeutung, die andere drückt ein Maximum aus, das darauf hindeutet, daß die Higgsmasse zu klein

---

<sup>2</sup>Dies ist eine Einschränkung der Aussage, daß die Physik unabhängig von der Wahl von  $\nu_{\text{ren}}$  sein sollte. Da der cut-off-Parameter lediglich hohe Impulse abschneiden soll, darf die untere Grenze ( $\nu_{\text{ren}}$  ist ja die untere Grenze des cut-off-Parameters) nicht zu niedrig gewählt werden, um die Physik nicht entscheidend zu beeinflussen. Praktisch bedeutet dies, daß es eine untere Grenze für  $\nu_{\text{ren}}$  gibt, die nicht unterschritten werden darf.

gewählt wurde. Man sollte jedoch im Auge behalten, daß (2.36) nur eine Entwicklung in erster Ordnung darstellt. Im Prinzip wird ja um den klassischen Fall entwickelt, so daß das effektive Potential nur für Felder in der Nähe des Minimums in 0-loop-Näherung überhaupt eine Gültigkeit besitzt. Für sinnvolle Aussagen über die Stabilität des Vakuums ist es nötig, in viel höhere Ordnungen zu gehen. Deswegen soll diese Besonderheit von (2.37) hier übergangen werden.

In der Arbeit [25] wurde durch diese Untersuchung eine untere Grenze für die Higgsmasse von etwa 130GeV gefunden, wenn man den heutigen Wert für die Masse des Topquarks einsetzt. Diese Zahl ist relativ groß und widerspricht der oberen Massengrenze von 80GeV aus [12]. Diese Diskrepanz ist bisher noch völlig ungeklärt.

Stabilität des Vakuums für verschiedene Higgsmassen

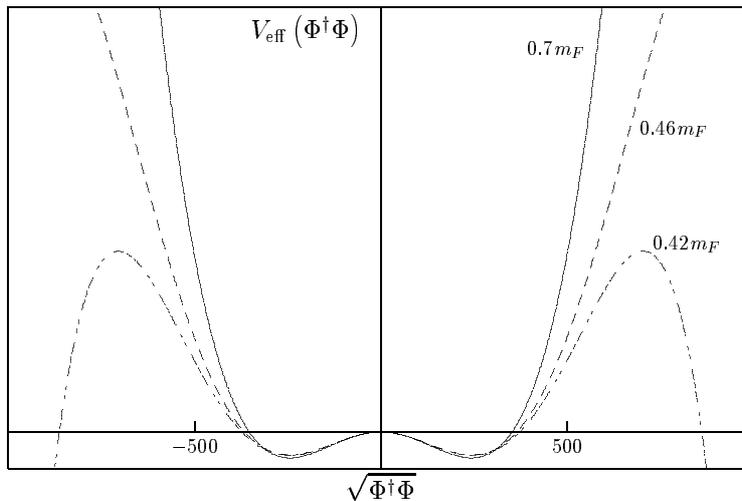


Abbildung 2.3.: Das effektive Potential als Funktion von  $\sqrt{\Phi^\dagger\Phi}$  in 1-loop-Näherung für verschiedene Werte der Higgsmasse  $\nu_H$  bei konstantem  $\nu_F$ . Bei zu kleinen  $\nu_H$  wird das Vakuum instabil und geht an den Rändern gegen  $-\infty$ . Die Einheit der Abszisse ist GeV, die Ordinateneinheit wurde unterdrückt und die Higgsmassen sind als Vielfache der Fermionenmasse an die Graphen geschrieben.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, daß masselose Fermionen-Dubletts keinen Einfluß auf  $v_1$  haben. Der Grund ist aus (2.36) sofort ersichtlich: Die Energie ist  $\propto \nu_F^2$ , d. h. der Beitrag für masselose Fermionen ist Null.

Jetzt kann man das selbstkonsistente Energiefunktional formulieren, wobei das Vakuum abzuziehen ist:

$$\begin{aligned}
E[A, \Phi] &= E_{\text{class}} + E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} - (E_{\text{class}} + E_{\text{ferm}}^{\text{ren}})|_{\Phi^\dagger\Phi=v_1^2} \\
&= \frac{m_W}{g^2} \int d^3r \left( \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + \frac{1}{2} (D_i\Phi)^\dagger (D_i\Phi) + \frac{\nu_H^2}{32} (\Phi^\dagger\Phi - v_1^2)^2 \right) \\
&\quad + E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} - E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}|_{\Phi^\dagger\Phi^2=v_1^2} + \frac{m_W\nu_H^2}{16g^2} (v_1^2 - 4) \int d^3r (\Phi^\dagger\Phi - v_1^2) \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Wird die folgende Ersetzung durchgeführt

$$\Phi \rightarrow \Phi \cdot \frac{v_1}{2}, \quad A \rightarrow A \cdot \frac{v_1}{2}, \quad r \rightarrow r \cdot \frac{2}{v_1},$$

so erhält man schließlich die folgende Form von (2.38):

$$E[A, \Phi] = \frac{v_1}{2} \left( E_{\text{class}} + E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}|_{\nu_{\text{ren}} \frac{2}{v_1}} + \frac{m_W\nu_H^2}{4g^2} \left( 1 - \frac{4}{v_1^2} \right) \int d^3r (\Phi^\dagger\Phi - 4) \right) \quad (2.39)$$

(Der untere Index  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}|_{\nu_{\text{ren}} \frac{2}{v_1}}$  bedeutet, daß in dem Ausdruck für die fermionische Energie  $\nu_{\text{ren}}$  durch  $2\nu_{\text{ren}}/v_1$  zu ersetzen ist.) Es taucht also ein Zusatzterm auf, der mit  $E_{\text{vac}}$  bezeichnet werden soll:

$$E_{\text{vac}} = \frac{m_W\nu_H^2}{8g^2} \left( 1 - \frac{4}{v_1^2} \right) \int d^3r (\Phi^\dagger\Phi - 4) \quad (2.40)$$

Dieser Zusatzterm stellt sicher, daß das physikalische Feld  $\Phi$  (bzw. die Felder  $G$  und  $H$ ) die Randbedingungen (2.16) erfüllt. Setzt man (2.10) in (2.40) ein, so erhält man schließlich

$$E_{\text{vac}} = \frac{4\pi m_W\nu_H^2}{g^2} \left( 1 - \frac{4}{v_1^2} \right) \int_0^\infty dr r^2 (H^2 + G^2 - 1) \quad (2.41)$$

Die Aufgabe, den Pfad minimaler Energie bei einem Übergang von  $N_{\text{CS}} = 0$  nach  $N_{\text{CS}} = 1$  zu finden, verlangt nun eine Minimierung des Funktionals (2.39) bei festem  $N_{\text{CS}}$ .

Ein durchaus willkommener Nebeneffekt findet sich außerdem in (2.39): Zwar stellt dieses Funktional ein neues Funktional dar, das auch von anderen Feldern minimiert wird (die Felder wurden ja umskaliert), aber wenn man die ursprünglichen Felder mit der alten Skalierung einsetzt, so minimieren sie immer noch den Anteil  $E_{\text{class}}$  von (2.39). Die zusätzlichen Terme stellen somit eine Störung dar, die, falls sie hinreichend klein ist, die Minimaleigenschaften nur geringfügig verändern.

## 2.8. Minimierung bei konstantem $N_{\text{CS}}$

Wie aus Abb. 2.1 ersichtlich ist, stellt die Sphaleronkonfiguration einen Sattelpunkt dar. Wenn man die in Kapitel 3.4 vorgestellten Verfahren zur Minimierung auf eine Startkonfiguration mit  $N_{\text{CS}} = 1/2$  anwenden würde, so würde man auf Probleme stoßen,

denn eine Minimierung würde sofort in Richtung eines Vakuums laufen (entweder das bei  $N_{CS} = 0$  oder das bei  $N_{CS} = 1$ ), so daß die gewünschte Konfiguration nicht gefunden werden kann. Es stellt sich also die Frage, wie die Nebenbedingung  $N_{CS} = \text{const.}$  eingehalten werden kann.

In [11] wurde hierzu ein Lagrangemultiplikator  $\xi$  eingeführt, mit dessen Hilfe man die Nebenbedingung einbauen konnte. Hier ist dieses Verfahren schwieriger, weil die implizit vorliegende Nebenbedingung nicht allgemein ohne großen Aufwand aufgelöst werden kann. Deshalb wird hier ein etwas anderer Ansatz gewählt: Die Energie (2.6) bzw. (2.39) wird durch Addition eines Zusatztermes verändert:

$$E_{\Sigma} = E_X[A, \Phi] + a(N_{CS}[A, \Phi] - N_{CS}^{\text{targ}})^b \quad (2.42)$$

wobei  $E_X$  das Funktional aus (2.6) bzw. (2.39) ist.  $N_{CS}^{\text{targ}}$  steht für den Chern-Simon-Index, bei dem die minimale Konfiguration gesucht werden soll.  $a$  ist eine zunächst beliebige Konstante, die groß genug gewählt werden muß.  $b$  wählt man am sinnvollsten zu  $b = 2$ ; bei dieser Wahl ist der Zusatzterm immer positiv, und für kleine Werte von  $(N_{CS} - N_{CS}^{\text{targ}})$  ist die Korrektur immer noch groß, was beispielsweise für  $b = 4$  nicht mehr der Fall wäre.

Der Sinn dieses Zusatztermes ist, zu erreichen, daß der Sattelpunkt von (2.6) bzw. (2.39) zu einem Minimum wird. Wie sich zeigt, ist dies tatsächlich möglich.

An die Stelle der alten Funktionale (2.6) bzw. (2.39) tritt somit das neue Funktional (2.42), das für die eigentliche Minimierung verwendet werden muß. Man beachte, daß das Funktional (2.42) dasselbe Ergebnis wie die alten Funktionale liefert, wenn  $N_{CS}[A, \Phi] = N_{CS}^{\text{targ}}$  ist.

## 2.9. Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

Zur Auffindung des minimalen Energiepfades ist es notwendig, das Funktional (2.39) bei festem  $N_{CS}$  zu minimieren. Die Eich- und Higgsfelder wurden als sphärisch symmetrisch angenommen, dadurch reduziert sich die Suche auf die Bestimmung von 5 Funktionen mit vorgegebenen Randbedingungen (2.15) und (2.16).

Wenn man die physikalischen Massen  $m_W$ ,  $m_H$  und  $m_F$  sowie den Renormierungspunkt  $\nu_{\text{ren}}$  vorgibt, ist es durch Invertieren des Gleichungssystems (2.34) möglich, die Parameter  $\nu_F$  und  $\nu_H$  des Lagrangian (2.4) zu finden. Die schwache Kopplungskonstante  $g$  erfährt erst in 2. Ordnung eine Korrektur und muß deswegen hier nicht renormiert werden. Den Parameter  $v_1$  erhält man aus (2.37). Dabei wird ebenfalls die Energieskala  $\tilde{m}_W$  des Systems bestimmt, womit es möglich ist, die Längen- und Energiedimensionen der Ergebnisse anzugeben. Mit diesen Parametern ist es möglich, die Energie (2.39) und damit auch (2.42) auszurechnen. Die Existenz eines geeigneten Minimierungsalgorithmus vorausgesetzt, kann man somit durch Minimierung von (2.38) die Feldkonfiguration minimaler Energie bei gegebenem  $N_{CS}$  auffinden und damit die Energie des Sphalerons bestimmen.

Die Konfiguration, die man durch Minimierung von (2.6) bei  $N_{CS} = 0.5$  erhält, stellt das Sphaleron auf 0-loop-Niveau dar. Betrachtet man hingegen das Energiefunktional (2.39),

so kann man zwei Fälle unterscheiden: minimiert man nur den ersten Term  $E_{\text{class}}$  von (2.39) (wobei die 1-loop-Bareparameter einzusetzen sind) und addiert anschließend die übrigen Terme, so erhält man die nichtselbstkonsistente Lösung aus [11]. Minimiert man hingegen den gesamten Ausdruck, so erhält man die selbstkonsistente Lösung. Für die Minimierung in Kapitel 4 wird die nichtselbstkonsistente Lösung als Startkonfiguration vorgegeben.

Im folgenden Kapitel werden die numerischen Mittel vorgestellt, mit deren Hilfe das Problem praktisch gehandhabt werden kann.

## 3. Numerische Minimierung

### 3.1. Interpolation mit Hilfe von Splines

Kontinuierlich variierende Größen können im Computer nur durch eine endliche Zahl von Stützstellen repräsentiert werden. Daher stellt sich das Problem, eine Funktion  $f(x)$ , die nur an bestimmten Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (mit  $x_1 < \dots < x_N$ ) bekannt ist, für jeden Punkt  $x$  innerhalb des Intervalls  $[x_1, x_N]$  abzuschätzen. Diesen Prozeß bezeichnet man als *Interpolation*. Es existieren unterschiedliche Verfahren, wie diese Interpolation durchgeführt werden kann. Alle basieren auf Annahmen über Stetigkeit und mehrfache Differenzierbarkeit im gesuchten Intervall. Eine ausführliche Abhandlung darüber findet sich in [26].

Für die in dieser Arbeit verwendeten Funktionen (insbesondere die Hedgehog-Felder) sind Polynome und rationale Funktionen nicht geeignet (siehe Abb. 3.1 und Abb. 3.2). Im Fall der Interpolation durch Polynome zeigt sich, daß die Kurven in gewissen Bereichen zwar gut wiedergegeben werden können, in anderen (dort, wo die Funktion wie ein Polynom niedriger Ordnung aussieht, z. B. eine Konstante oder eine Gerade) jedoch versagen. In Abbildung 3.1 wurden zwar die Punkte ausgeschlossen, wo  $B(x)$  auf seinen Vakuumwert gefallen ist, trotzdem konnte die Kurve nicht korrekt wiedergegeben werden. In Abbildung 3.2 zeigt sich, daß die Funktion sehr stark oszilliert; dieses Verhalten kann man abschwächen, indem man nur Punkte in der Umgebung des zu interpolierenden Bereiches verwendet, aber auch hier versagt das Verfahren spätestens in der Nähe des Bereiches, wo  $B(x)$  sich seinem Vakuumwert nähert.

Als geeignet haben sich hingegen kubische Splines erwiesen. Dabei wird angenommen, daß die betrachtete Funktion zweimal differenzierbar ist und daß die Funktionswerte an den Stellen  $x_i$  mit  $y_i = f(x_i)$  bekannt sind. Dann ergibt eine lineare Interpolation sofort

$$y = Ay_j + By_{j+1} \quad (3.1)$$

mit

$$A \equiv \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad B \equiv 1 - A = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (3.2)$$

Ferner wird angenommen, daß auch die zweiten Ableitungen  $y_i'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x_i)$  bekannt sind. Dann kann die Funktion im Intervall  $[x_j, x_{j+1}]$  folgendermaßen dargestellt werden:

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy_j'' + Dy_{j+1}'' \quad (3.3)$$

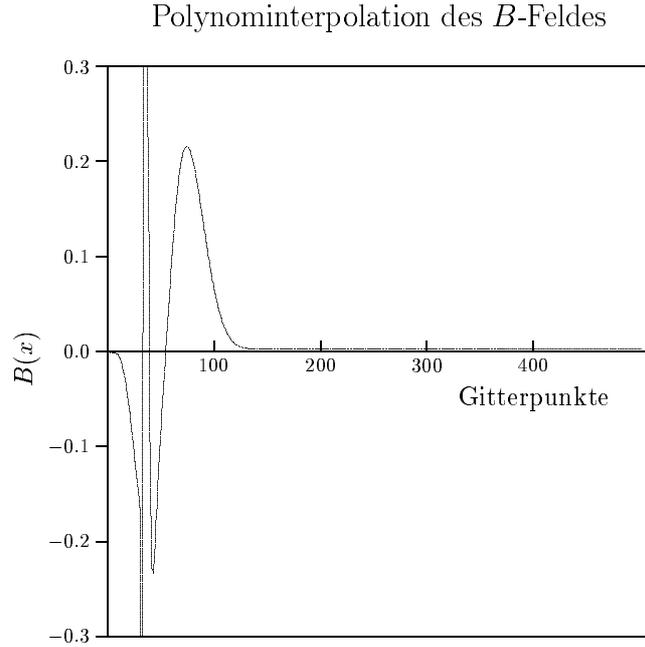


Abbildung 3.1.: Die Interpolation des Hedgehogfeldes  $B(x)$  der klassischen Sphaleronkonfiguration (siehe Abbildung 4.2) mittels Polynomen. Die Abszissen-einheit sind die Zahl der Stützstellen, wobei 501 Stützstellen physikalisch einer Länge von  $12m_W^{-1}$  entsprechen. Das Verfahren ist offensichtlich nicht in der Lage, die Ausgangsfunktion korrekt wiederzugeben.

mit  $A$  und  $B$  aus (3.2) und

$$C \equiv \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \quad D \equiv \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2 \quad (3.4)$$

Bei den Interpolationsproblemen sind die zweiten Ableitungen jedoch nicht bekannt. Es ist aber möglich, sie aus den vorgegebenen Werten  $y_i$  zu bestimmen. Dafür differenziert man Gleichung (3.3) (in die man die Definitionsgleichungen (3.2) und (3.4) eingesetzt hat) nach  $x$  und erhält:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{3A^2 - 1}{6}(x_{j+1} - x_j)y_j'' + \frac{3B^2 - 1}{6}(x_{j+1} - x_j)y_{j+1}'' \quad (3.5)$$

Die gesuchte Bestimmungsgleichung für die zweiten Ableitungen  $y_i''$  folgen, indem man  $x = x_j$  für das Intervall  $[x_{j-1}, x_j]$  in (3.5) einsetzt und diesen Ausdruck gleichsetzt mit (3.5) ausgewertet für  $x = x_j$  für das Intervall  $[x_j, x_{j+1}]$ . Dann folgt (für  $j = 2, \dots, N-1$ ):

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6}y_{j-1}'' + \frac{x_{j+1} - x_j - 1}{3}y_j'' + \frac{x_{j+1} - x_j}{6}y_{j+1}'' = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

Dies ergibt insgesamt  $N-2$  lineare Gleichungen für die Unbekannten  $y_i$  mit  $i = 2, \dots, N$ . Die Werte für  $y_1''$  und  $y_N''$  müssen von Hand gesetzt werden und zwar werden sie im

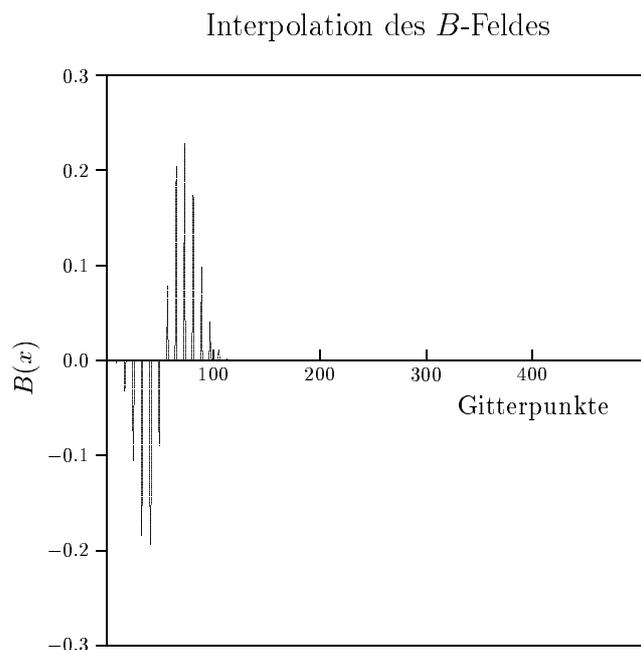


Abbildung 3.2.: Interpolation des Hedgehogfeldes  $B(x)$  der klassischen Sphaleronkonfiguration mit rationalen Polynomen. Die Einheiten der Achsen sind wie oben. Auch dieses Verfahren versagt, da die Polynome zwischen den Stützstellen zu stark oszillieren.

Folgenden auf 0 gesetzt. Dies ergibt die sog. *natürlichen kubischen Splines*. Diese Interpolationstechnik wird in dieser Arbeit durchgehend verwendet.

## 3.2. Auswertung der fermionischen Energie

Es muß zunächst untersucht werden, wie die Berechnung der Fermionenenergie (2.29) praktisch vonstatten gehen kann. Denn selbstverständlich ist es nicht möglich, das System bei einer unendlichen „Kastengröße“ (also im Limes  $R \rightarrow \infty$  und  $z_{\max} \rightarrow \infty$  (für die Definitionen von  $R$  und  $z_{\max}$  siehe Anhang B)) und für alle  $K$  (die Quantenzahlen des Grandspins, siehe Kapitel 2.3) zu untersuchen. Die Fermionenenergie kann nur für einige  $K$  (um die Anzahl der Diagonalisierungen klein zu halten) bei gegebenem Cutoff  $\Lambda$  ausgerechnet werden, wobei  $\Lambda$  zudem möglichst klein sein sollte, um die zu diagonalisierenden Matrizen möglichst klein zu machen. Denn der Rechenaufwand für die Diagonalisierung einer Matrix der Dimension  $m$  steigt mit  $m^3$ . Auf diese Punkte soll nun im Folgenden einzeln eingegangen werden.

### 3.2.1. Die Wahl der Größen $\Lambda$ und $z_{\max}$

Untersuchungen zur Stabilität der Lösungen für verschiedene Werte von  $\Lambda$  und  $z_{\max}$  sind bereits in [11] vorgenommen worden. Dort wurde als eine Bedingung  $z_{\max} \geq 3.5\Lambda R$  gefunden. Die fermionische Energie (2.29) im Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  wurde durch Extrapolation von zwei Werten bei endlichem  $\Lambda$  bestimmt. Durch Entwicklung der Energie folgt

$$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda) = E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty) + \frac{C}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right), \quad (3.6)$$

somit kann man  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty)$  ermitteln durch

$$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty) = \frac{E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda_2)\Lambda_2^2 - E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda_1)\Lambda_1^2}{(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)}$$

Allerdings zeigt sich, daß das Ergebnis dieser Formel erst für relativ große  $\Lambda$  in der Größenordnung von  $5m_W$  verlässliche Werte liefert. Man kann jedoch auch bis zu höheren Ordnungen entwickeln. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, bis zur 3. Ordnung in  $\Lambda^{-2}$  zu gehen:

$$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda) = E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty) + \frac{C}{\Lambda^2} + \frac{D}{\Lambda^4} + \frac{E}{\Lambda^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^8}\right) \quad (3.7)$$

Dann erhält man  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty)$  durch

$$\begin{aligned} E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\infty) = & \left( E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_2^4 \Lambda_3^2 - E_2 \Lambda_1^4 \Lambda_2^6 \Lambda_3^2 - E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_2^2 \Lambda_3^4 \right. \\ & + E_2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^6 \Lambda_3^4 + E_3 \Lambda_1^4 \Lambda_2^2 \Lambda_3^6 - E_3 \Lambda_1^2 \Lambda_2^4 \Lambda_3^6 \\ & - E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_2^4 \Lambda_4^2 + E_2 \Lambda_1^4 \Lambda_2^6 \Lambda_4^2 + E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_3^4 \Lambda_4^2 \\ & - E_2 \Lambda_2^6 \Lambda_3^4 \Lambda_4^2 - E_3 \Lambda_1^4 \Lambda_3^6 \Lambda_4^2 + E_3 \Lambda_2^4 \Lambda_3^6 \Lambda_4^2 \\ & + E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_2^2 \Lambda_4^4 - E_2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^6 \Lambda_4^4 - E_1 \Lambda_1^6 \Lambda_3^2 \Lambda_4^4 \\ & + E_2 \Lambda_2^6 \Lambda_3^2 \Lambda_4^4 + E_3 \Lambda_1^2 \Lambda_3^6 \Lambda_4^4 - E_3 \Lambda_2^2 \Lambda_3^6 \Lambda_4^4 \\ & - E_4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^2 \Lambda_4^6 + E_4 \Lambda_1^2 \Lambda_2^4 \Lambda_4^6 + E_4 \Lambda_1^4 \Lambda_3^2 \Lambda_4^6 \\ & \left. - E_4 \Lambda_2^4 \Lambda_3^2 \Lambda_4^6 - E_4 \Lambda_1^2 \Lambda_3^4 \Lambda_4^6 + E_4 \Lambda_2^2 \Lambda_3^4 \Lambda_4^6 \right) \\ & / \left( \left( (-\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) \right) \left( -\Lambda_1^2 + \Lambda_3^2 \right) \left( -\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 \right) \left( -\Lambda_1^2 + \Lambda_4^2 \right) \right. \\ & \left. \left( -\Lambda_2^2 + \Lambda_4^2 \right) \left( -\Lambda_3^2 + \Lambda_4^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Die Resultate der einfacheren Formel (3.6) zeigt Abbildung 3.3. Wenn man die durchgezogene Kurve, die durch zwei weit außen liegende Punkte geht, für den Fit verwendet, erhält man ein Ergebnis, das von dem des Fits durch zwei innenliegende Punkte um etwa 0.7% abweicht. Dies ist zwar wenig, aber das Ergebnis ist durch die Verwendung von (3.7) zu verbessern, wie Abbildung 3.4 zeigt. Die durchgezogene Kurve geht durch 4 innenliegende Punkte und hat gegenüber dem Ergebnis von (3.6) nur einen Fehler von 0.1%. Dieses Ergebnis zeigt also, daß die Formel (3.7) eine Verbesserung darstellt und die Rechnungen erheblich vereinfachen kann. Die erhöhte Genauigkeit dieser Extrapolation ermöglicht es, auch noch mit einem  $\Lambda_{\max} = 2.2m_W$  vernünftige Ergebnisse zu erzielen.

Einen Nachteil von (3.7) zeigt die gepunktete Kurve in Graph 3.4. Hier wurden zur Anpassung 4 außenliegende Punkte gewählt, diese jedoch nur mit geringem Abstand. Das entstehende rationale Polynom weicht bereits bei  $\Lambda = 3.5m_W$  signifikant von den übrigen Punkten ab. Obwohl der Grenzwert noch ein akzeptabler Wert ist, geht doch zuviel Information verloren, da die Punkte nicht weit genug auseinanderliegen, um sinnvolle Aussagen über den Verlauf der Kurve gewinnen zu können. Dies stellt andererseits im Bereich um  $\Lambda = 2m_W$  überhaupt kein Problem dar (weil die Einflüsse der Terme mit hohen Potenzen von  $\Lambda^{-2}$  hier bedeutend sind), so daß die Formel hier ohne weitere Einschränkungen verwendet werden kann.

Die hierdurch verursachten Vereinfachungen sind enorm, da  $z_{\max}$  nun um einen Faktor von 2.4 verkleinert werden kann und deswegen die zu diagonalisierenden Matrizen wesentlich kleiner gewählt werden können (da weniger Nullstellen der Besselfunktionen im Intervall  $[0, z_{\max}]$  liegen und dementsprechend weniger Energieeigenwerte auftreten).

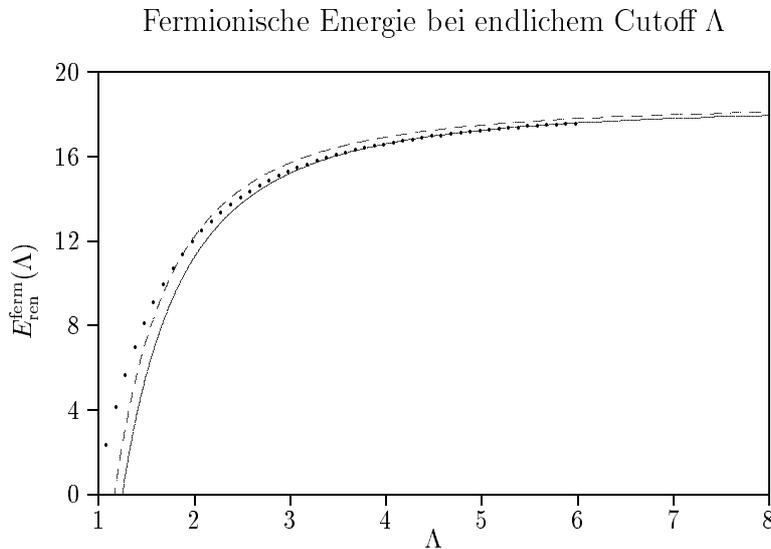


Abbildung 3.3.: Quadratische Extrapolation der Funktion  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda)$  mittels (3.6). Die Einheiten beider Achsen sind  $m_W$ . Die Punkte sind die berechneten Werte  $E_{\text{ferm}}^{\text{ferm}}$ . Die durchgezogene Kurve verwendet zum Fit die Punkte  $\Lambda_1 = 5m_W$  und  $\Lambda_2 = 6m_W$  und hat einen Grenzwert von  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} = 18.3708m_W$ . Die gestrichelte Kurve geht durch die Punkte  $\Lambda_1 = 1.8m_W$  und  $\Lambda_2 = 2.4m_W$  und hat einen Grenzwert von  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} = 18.4779m_W$ .

Leider ist es nicht möglich, auf ähnliche Art und Weise, den letzten verbliebenen Parameter, die Kastengröße  $R$ , mit irgendwelchen zusätzlichen Beziehungen zu reduzieren. Es ist immer nötig, den Parameter  $R$  größer als die Sphalerongröße zu wählen. Dies ist (siehe [11]) im Fall der klassischen Sphaleronlösung ein Wert von  $R \geq 10\tilde{m}_W^{-1}$ . Wenn sich herausstellt, daß die selbstkonsistente Lösung noch größer ist, müßte man  $R$  entsprechend vergrößern, um diesem Effekt Rechnung zu tragen. Wie sich in Kapitel 3.5 und später auch in Kapitel 4 herausstellen wird, ist dies tatsächlich der Fall. Andererseits

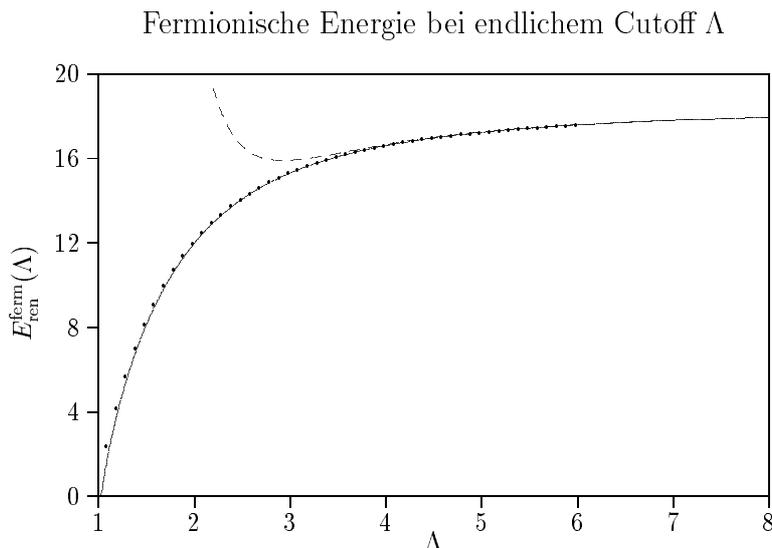


Abbildung 3.4.: Extrapolation der Funktion  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}(\Lambda)$  mittels (3.7). Die Einheiten beider Achsen sind  $m_W$ . Es sind die gleichen Punkte eingezeichnet wie in Abb. 3.3. Die durchgezogene Kurve verwendet die Punkte  $\Lambda = 1.8m_W, 2.0m_W, 2.2m_W, 2.4m_W$ . Ihr Grenzwert ist  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} = 18.3864m_W$ . Die gestrichelte Kurve stellt einen Fit durch die Punkte  $\Lambda = 5.4m_W, 5.6m_W, 5.8m_W, 6.0m_W$  dar. Der Grenzwert ist hier  $E_{\text{ferm}}^{\text{ren}} = 18.3533$ .

zeigt sich, daß es möglich ist, diesen Effekt zu vernachlässigen, da der Einfluß nur sehr gering ist und sich nicht auf das Ergebnis des Energiefunktional niederschlägt.

### 3.2.2. Auswertung der Energien für unterschiedliche $K$

Für jeden Grandspin  $K$  ist es im Prinzip nötig, die fermionische Determinante zu diagonalisieren und den Energiebeitrag auszurechnen. Dann ist über sämtliche Einzelbeiträge der unterschiedlichen  $K$  zu summieren. Glücklicherweise geht für  $K \rightarrow \infty$  der Energiebeitrag für die einzelnen  $K$ ,  $E_{\text{ferm},K}^{\text{ren}}$  gegen Null, so daß es nur notwendig ist, die Summation bis zu einem bestimmten  $K_{\text{max}}$  durchzuführen.

Es stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, die Rechnungen zu beschleunigen, denn zum jetzigen Zeitpunkt ist es immer noch notwendig,  $K_{\text{max}} + 1$  Matrixdiagonalisierungen durchzuführen. Wenn man sich jedoch die einzelnen Beiträge als Folge der einzelnen  $K$  ansieht (siehe die Punkte in Abb. 3.5), so wird deutlich, daß es möglich wäre, die Folge durch eine kontinuierliche Funktion  $f(K)$  zu approximieren. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Beiträge für niedrige  $K$  recht stark oszillieren können, so daß in diesem Bereich nicht genügend Stützstellen für eine Interpolation vorliegen.

Mit diesen Beobachtungen kann man nun versuchen,  $f(K)$  durch eine Splineinterpolation (siehe Kapitel 3.1) zu approximieren. Es stellt sich die Frage, wie die Stützstellen verteilt

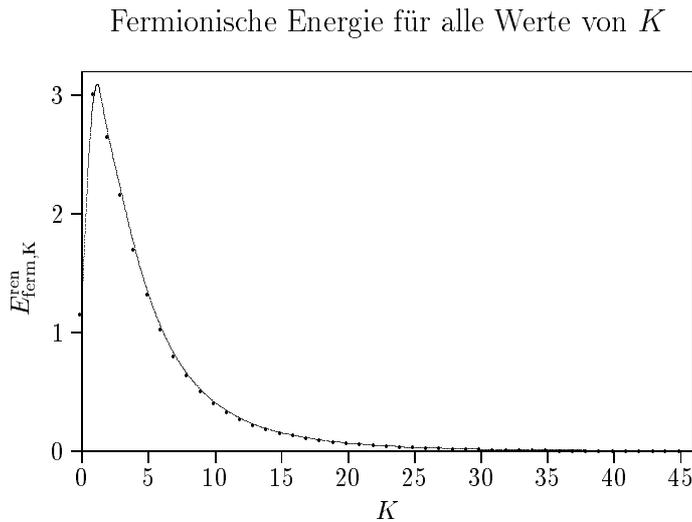


Abbildung 3.5.: Der fermionische Energiebeitrag  $E_{\text{ferm},K}^{\text{ren}}$  für die klassische Sphaleronkonfiguration. Die Punkte sind die einzelnen Energiewerte. Es erscheint möglich und sinnvoll, diese Folge durch eine kontinuierliche Funktion  $f(K)$  zu approximieren, die durch eine Splineinterpolation dargestellt werden kann (die durchgezogene Linie).

sein müssen, um einerseits möglichst wenige Stellen  $E_{\text{ferm},K}^{\text{ren}}(K)$  berechnen zu müssen, andererseits jedoch einen möglichst guten Wert für die gesamte Energie zu bekommen. Folgende Verteilung hat sich bewährt und auch in [27] als verlässlich herausgestellt:

$$K = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 16, 21, 26, \dots$$

usw. bis die Beiträge kleiner als eine untere Schranke werden (die von der gewünschten Genauigkeit abhängt). Die Funktion aus Abb. 3.5 ist mit Hilfe dieser Punkte bestimmt worden und liegt auch hervorragend auf den anderen Punkten, die nicht in die Splineinterpolation eingegangen sind.

### 3.3. Repräsentation der Felder

Die Repräsentation der Felder im Speicher des Computers geschieht dadurch, daß eine endliche Zahl von Stützstellen abgespeichert wird, die die Funktionswerte an diesen Stellen repräsentieren. Da insgesamt 4 Felder auf diese Art und Weise dargestellt werden müssen, ist die Dimension des Problems  $4 \cdot n$  (wenn  $n$  die Zahl der Stützstellen pro Feld ist). Wie sich in Kapitel 3.4 zeigen wird, steigt der Rechenaufwand bei der Minimierung quadratisch mit der Zahl der Dimensionen, so daß es notwendig erscheint, die Zahl der benötigten Stützstellen so weit wie möglich zu reduzieren, ohne entscheidend an Information zu verlieren.

Zunächst ist zu untersuchen, welche Operationen auf die Felder angewendet werden sollen. Dazu gehören die Integrationen. Für diese Operation wird das Verfahren der In-

tegration nach Simpson verwendet (siehe [26]). Für dieses Verfahren wird angenommen, daß die Funktion dreifach differenzierbar ist, damit ist das Verfahren vierter Ordnung in  $h$ .

Bei der Berechnung der ersten Ableitung einer Funktion  $f(x)$ , die an den äquidistanten Stellen  $x_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) gegeben ist, kann man von der Taylorentwicklung ausgehen (dieses Verfahren stammt aus [27]):

$$\begin{aligned} f_{\pm 1} &= f_0 \pm hf' + \frac{1}{2}h^2f'' \pm \frac{1}{6}h^3f''' + \mathcal{O}(h^4) \\ f_{\pm 2} &= f_0 \pm 2hf' + 2h^2f'' \pm \frac{4}{3}h^3f''' + \mathcal{O}(h^4) \\ f_{\pm 3} &= f_0 \pm 3hf' + \frac{9}{2}h^2f'' \pm \frac{9}{2}h^3f''' + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

wobei  $f_0 = f(x_i)$ ,  $f_{\pm j} = f(x_{i\pm j})$ . Durch Umstellen dieser Gleichungen erhält man nun (nach Division durch  $h$ ) folgenden Ausdruck für die erste Ableitung:

$$f' = \mp \frac{1}{6h} (11f_0 - 18f_{\pm 1} + 9f_{\pm 2} - 2f_{\pm 3}) \quad (3.8)$$

Der Ausdruck für (3.8) ist genau bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$ . Zur Berechnung der Funktionale (2.6) bzw. (2.39) ist es notwendig, die ersten Ableitungen der Felder  $X(x)$  ( $X = A, B, C, G, H$ ) nach ihren Argument zu kennen. Zur Berechnung der Gradienten der Felder ist es jedoch notwendig, auch über die zweiten Ableitungen zu verfügen (siehe [27]). Im Kontext dieser Arbeit wird sich jedoch zeigen, daß eine Formel mit der Genauigkeit  $\mathcal{O}(h^3)$  auf das Problem stößt, daß die Splineinterpolation nicht oft genug differenzierbar ist (da Ableitungsregeln der Form (3.8) zur Bestimmung der zweiten Ableitung einer Funktion  $f(x)$  die Existenz mindestens der 4. Ableitung voraussetzen) und darum nicht mit der hier gemachten Darstellung der Felder kompatibel ist. Dieser Nachteil erweist sich aber als nicht so gravierend, da die Berechnung des Gradienten in dieser Arbeit an keiner Stelle erforderlich ist.

Mit diesen Operationen ist es nun möglich, als Ansatz für die Darstellung der Felder  $N$  äquidistante Stützstellen zu wählen. Diese Stützstellen müssen so gewählt werden, daß die erste Stützstelle bei  $x_1 = 0$  liegt und die letzte  $x_N$  so groß gewählt sein muß, daß die Felder bereits bei  $f(x_N)$  ihren Vakuumerwartungswert (siehe (2.16)) erreicht haben. Ferner muß es möglich sein, die Anzahl so weit wie möglich zu begrenzen, damit die Minimierung (siehe Kap. 3.4) möglichst einfach wird.

In den Arbeiten [11, 22, 27, 9] hat sich als Ansatz eine Verteilung von 501 Stützstellen für die meisten Anwendungen als zweckmäßig erwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit stellt sich eine solche Anzahl jedoch als unbrauchbar heraus, denn damit bräuchte man zur Darstellung aller 4 Felder insgesamt  $N = 2004$  Stützstellen, und die Minimierung würde auf eine Minimierung einer Funktion in  $n = 2005$  Dimensionen hinauslaufen (ein Parameter wird ja noch für das  $C(x)$ -Profil verwendet).

Eine einfache Rechnung (s.u.) ergibt, daß dies vollkommen unpraktikabel ist und es sich als notwendig erweist, die Zahl der Dimensionen zu reduzieren. Zu diesem Zweck erweist es sich als sinnvoll, auf die Splineinterpolation aus Kap. 3.1 zurückzugreifen. Damit

ist es möglich, die Felder für die Minimierung durch eine wesentlich geringere Anzahl von Stützstellen darzustellen, für die Anwendung der Integration und Differentiation jedoch auf eine größere Anzahl von Stützstellen zu interpolieren. Dies stellt praktisch die Verwendung eines besseren Integrationsverfahrens als des Simpson-Verfahrens dar, jedoch ist es auf diese Art möglich, die Funktionen ständig mit den Ergebnissen einer Funktion mit größerer Anzahl von Stützstellen zu vergleichen. Prinzipiell ist also das Interpolationsverfahren das flexiblere Verfahren. Im Folgenden wird die Koordinate  $x$  der Hedgehogfelder  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $G(x)$  und  $H(x)$  zur einfachen Veranschaulichung nicht in physikalischen Einheiten  $m_W^{-1}$ , sondern in Gitterpunkten gemessen. Dabei entsprechen  $501GP = 12m_W^{-1}$ .

Die Verteilung der neuen Stützstellen soll äquidistant vorgenommen werden, um keine zusätzlichen Annahmen über das Aussehen der Felder machen zu müssen. Der Anfangspunkt  $r = 0$  (das entspricht Gitterpunkt 1) ist festzuhalten, da sonst die Integrale divergieren. Mögliche Lösungen des klassischen Problems werden später in Kapitel 4 noch explizit vorgestellt. Zum jetzigen Zeitpunkt kann man aber schon das Bild 4.2 heranziehen. Offensichtlich nähern sich die Felder schon recht früh dem Vakuum Erwartungswert an, so daß eine vollständige Überdeckung des gesamten Intervalls mit Stützstellen nicht notwendig erscheint. Zwar kann die selbstkonsistente Lösung Felder haben, die weiter hinausreichen, aber es ist sinnvoll, zunächst mit relativ begrenzten Feldern zu arbeiten.

Es stellt sich noch die Frage, wie weit man die Zahl der Stützstellen auf diese Art verringern kann, ohne daß der numerische Fehler in den Rechnungen allzu groß wird. Dies hängt mit der Frage nach dem korrekten Abstand zwischen den Stützstellen zusammen. Je weiter die neuen Stützstellen auseinanderliegen, desto mehr Informationen über die Felder verliert man. Die einfachste und informativste Methode, dies herauszufinden, besteht darin, daß man das Funktional (2.6) ausrechnet und dann untersucht, ab wann die Genauigkeit nicht mehr akzeptabel wird. Tabelle 3.1 zeigt Ergebnisse dieser Untersuchung. Eine gute Anzahl von Stützstellen zeigt die letzte Zeile (zusammen mit einem akzeptablen Abstand) — wie aus den darüberstehenden Zeilen hervorgeht, führt eine weitere Verminderung der Punkte dazu, daß die ursprüngliche Konfiguration nicht mehr korrekt wiedergegeben wird. Daß hier  $n_h$  nicht verändert wurde, liegt daran, daß das  $H$ -Profil der selbstkonsistenten Lösung noch recht weit hinausreicht und dieser numerische Parameter gesondert untersucht werden muß (Kapitel 4). Für die hier diskutierte Fragestellung ist  $n_h = 31$  natürlich ein guter Wert.

Es stellt sich die Frage, wie gut die Ergebnisse verglichen werden können. Abbildung 3.6 zeigt die Differenz des Ausgangsfeldes  $A(x)$  und des interpolierten Feldes  $A_{\text{spline}}(x)$ . Die Fehler liegen maximal in der Größenordnung von  $10^{-3}$ , da  $\mathcal{O}(A(x)) = 1$ . Bei den Fehlern in den ersten Ableitungen (die Ableitung wird nicht durch Splineinterpolation sondern durch (3.8) bestimmt) werden sich die Fehler in den Ausgangsfeldern natürlich aufsummieren. Da aber ebenfalls  $\mathcal{O}(A'(x)) = 1$  ist und die Abweichungen maximal in der Größenordnung  $10^{-2}$  liegen, könnte man die Befürchtung haben, daß diese Fehler durchaus einen Einfluß haben könnten. In der Praxis zeigt sich jedoch, daß dies nicht der Fall ist, denn Tabelle 3.1 demonstriert ja gerade, daß das Energiefunktional unempfindlich gegenüber diesen Verzerrungen ist.

Stützstellen					$E_{\text{class}}$
$n_a$	$n_b$	$n_g$	$n_h$	$\Delta I$	
501	501	501	501	1	99.65863
99	99	99	99	5	99.65870
49	49	49	49	10	99.66270
15	17	17	31	10	99.70135
21	11	17	31	10	100.76738
21	17	11	31	10	111.25071
21	17	17	31	10	99.66467

Tabelle 3.1.: Untersuchung zur Genauigkeit der Rechnung bei Reduzierung der Anzahl der Stützstellen der Felder. Die ersten 4 Spalten zeigen die Anzahl der Stützstellen für die Hedgehogfelder. Die 5. Spalte zeigt den Abstand zwischen den Stützstellen bezogen auf das Gitter mit 501 Punkten (entsprechend einer Länge von  $12m_W^{-1}$ ). Die letzte Spalte ist die numerische Energie des Funktionals (2.6) in Einheiten von  $m_W$ .

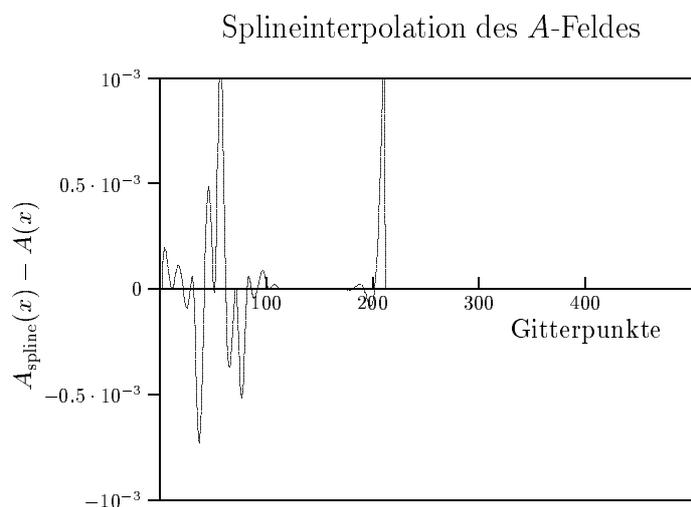


Abbildung 3.6.: Vergleich der Ausgangsfelder der klassischen Sphaleronkonfiguration mit den Spline-Interpolationen. Die Abszisseneinheit sind Gitterpunkte (siehe Text), und die Ordinate ist dimensionslos. Wie man sieht, kann die Interpolation die Felder gut reproduzieren und die Fehler liegen in der Größenordnung von  $10^{-3}$ .

### 3.4. Minimierung einer $n$ -dimensionalen Funktion

Für diese Arbeit ist es unerlässlich, eine Methode auszuwählen, die es ermöglicht, eine  $n$ -dimensionale Funktion zu minimieren. Die Literatur kennt eine große Anzahl mögli-

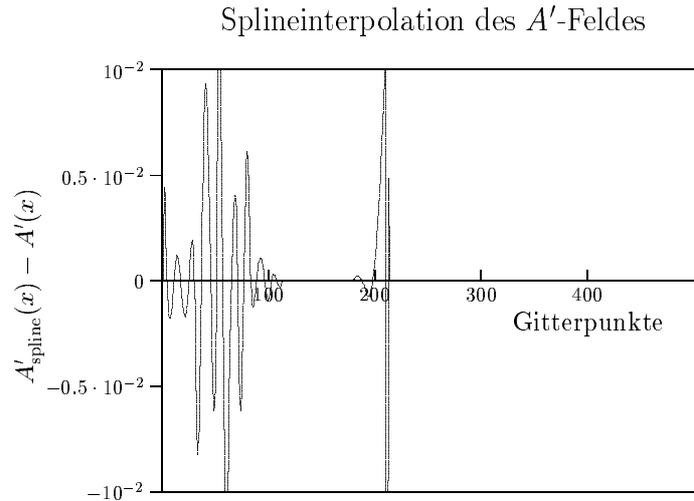


Abbildung 3.7.: Die Differenzen der ersten Ableitung der Splineinterpolation und des ursprünglichen Feldes. Die Einheiten sind wie in Abb. 3.6. Die Fehler sind allerdings in der Größenordnung von  $10^{-2}$ , also um einen Faktor 10 größer als in der vorhergehenden Abbildung.

cher Verfahren [26]. Hier soll ein Verfahren verwendet werden, das keine Berechnung des Gradienten erfordert und trotzdem hinreichend schnell konvergiert. Dazu wurde das Verfahren von *Powell* gewählt. In [28] wird gezeigt, daß dieses Verfahren quadratisch konvergent ist, d. h. es werden  $n(n+1)$  Minimierungen entlang einer bestimmten Richtung im Definitionsbereich der Funktion benötigt, um die Funktion zu minimieren. Bevor dieses Verfahren näher beschrieben wird, soll zunächst noch auf die Minimierung einer 1-dimensionalen Funktion eingegangen werden.

### 3.4.1. Minimierung einer 1-dimensionalen Funktion

Betrachtet werde die Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Um die Lage eines Minimums zu charakterisieren, ist es notwendig, ein Tripel von Zahlen  $(a, b, c)$  anzugeben, die das Minimum einschließen. Die Eigenschaften sind

$$a < b < c$$

$$f(a) > f(b) \quad \text{und} \quad f(c) > f(b) \quad (3.9)$$

Es ist ersichtlich, daß die Situation ähnlich einer Nullstellensuche ist, nur daß dort lediglich zwei Werte (die Intervallgrenzen, innerhalb derer sich die Nullstelle befindet) anzugeben sind. Bei dem Minimierungsproblem kann man  $b$  als einen Näherungswert für das Minimum ansehen.

Unter der Annahme, daß das Minimum genau bei  $b$  liegt, ist folgende Entwicklung in der Nähe von  $b$  möglich:

$$f(x) \approx f(b) + \frac{1}{2}f''(b)(x - b)^2 + \dots \quad (3.10)$$

Wenn die numerische Genauigkeit des Rechners  $\varepsilon$  ist (also  $\varepsilon$  der größtmögliche Wert ist, für den der Computer  $(1 - \varepsilon)b$  und  $(1 + \varepsilon)b$  nicht mehr unterscheiden kann), dann wird der zweite Term in (3.10) genau dann gegenüber dem ersten vernachlässigbar sein (d. h. er wird um einen Faktor von  $\varepsilon$  kleiner sein und sich wie 0 verhalten, wenn er addiert wird), falls gilt

$$|x - b| < \sqrt{\varepsilon}|b| \sqrt{\frac{2|f(b)|}{b^2 f''(b)}}$$

Da die rechte Seite proportional zu  $\sqrt{\varepsilon}$  ist, ist ein Minimierungsalgorithmus nur in der Lage, eine Funktion mit einer Genauigkeit von  $\sqrt{\varepsilon}$  zu minimieren. Dies stellt eine verfahrensunabhängige obere Grenze dar, die nicht überschritten werden kann.

Nachdem geeignete Anfangspunkte festgelegt wurden (d. h. Punkte, die (3.9) genügen), wird in dieser Arbeit das *Brent-Verfahren* [28, 26] verwendet, um das Extremum genauer zu lokalisieren. Da das Verfahren in der genannten Literatur ausführlich vorgestellt wird, soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Mit diesem Verfahren zur Linienminimierung ist es nun möglich, eine Funktion  $F(\mathbf{x})$  in mehreren Dimensionen entlang einer bestimmten Richtung  $\mathbf{u}$  mit Startpunkt  $\mathbf{P}_0$  zu minimieren, wenn man eine 1-dimensionale Minimierung der Funktion

$$f(\lambda) \equiv F(\mathbf{P}_0 + \lambda \mathbf{u})$$

vornimmt.

#### 3.4.2. Das Powell-Verfahren

Die Idee der Powellmethode besteht darin, eine Menge von Richtungen zu finden (d. h. Vektoren aus dem Definitionsbereich der zu minimierenden Funktion), die einerseits (in einer noch näher zu definierenden Weise) „unabhängig“ voneinander sind, andererseits aber große Schritte auf das Minimum hin ermöglichen. Wären die Richtungen nicht unabhängig, so würde eine Linienminimierung entlang eines Vektors die Minimaleigenschaften bezüglich eines anderen Vektors zerstören und umgekehrt. Dadurch würde sich das Verfahren in einem Kreis verfangen und könnte die Lösung nicht finden.

Mathematisch bezeichnet man eine solche Menge von Vektoren als *konjugiert*. Durch Taylor-Entwicklung um einen Punkt  $\mathbf{P}$  erhält man

$$\begin{aligned} f(\mathbf{P} + \mathbf{x}) &= f(\mathbf{P}) + \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \right|_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{P}} x_i x_j + \dots \\ &\approx c - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

mit

$$c \equiv f(\mathbf{P}), \quad \mathbf{b} \equiv -\nabla f|_{\mathbf{P}}, \quad A_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{P}}$$

In dieser Näherung kann der Gradient einfach berechnet werden:

$$\nabla f = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}$$

Die Änderung des Gradienten wird nun beschrieben durch

$$\delta(\nabla f) = \mathbf{A} \cdot (\delta \mathbf{x})$$

Wenn man entlang einer Richtung  $\mathbf{u}$  zu einem Minimum läuft, dann wird der Gradient (der ja die Richtung der größten Funktionsänderung anzeigt) anschließend senkrecht zu  $\mathbf{u}$  stehen. Damit die nächste Minimierung bezüglich einer anderen Richtung  $\mathbf{v}$  nicht die Minimierung entlang  $\mathbf{u}$  zerstört, muß die Änderung des Gradienten auch senkrecht zu  $\mathbf{u}$  sein, damit der geänderte Gradient  $\nabla f + \delta(\nabla f)$  immer noch senkrecht zu  $\mathbf{u}$  steht. Das heißt also:

$$0 = \mathbf{u} \cdot \delta(\nabla f) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (3.11)$$

Ist Bedingung (3.11) für zwei Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  erfüllt, so bezeichnet man sie als *konjugiert*. Gilt (3.11) paarweise für alle Elemente einer Menge von Vektoren, so bezeichnet man diese Menge als konjugiert. Mehrere Linienminimierungen entlang konjugierter Richtungen können sich nicht gegenseitig stören.

Um diese Richtungen zu finden, geht das Powellverfahren folgendermaßen vor:

Man gibt eine Menge von Richtungen  $\mathbf{u}_i$  vor:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Nun wendet man die folgende Prozedur iterativ auf das System an:

- Die Startposition sei  $\mathbf{P}_0$ .
- Man führe  $N$  Linienminimierungen entlang der  $\mathbf{u}_i$  durch und nenne den Zielpunkt  $\mathbf{P}_N$ .
- Man ersetze  $\mathbf{u}_i$  durch  $\mathbf{u}_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ).
- $\mathbf{u}_N := \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0$
- Man minimiere nochmals entlang  $\mathbf{u}_N$  und wähle den Zielpunkt als neuen Punkt  $\mathbf{P}_0$ .

Der Nachteil dieses Verfahrens besteht offensichtlich darin, daß bei jedem Schritt  $\mathbf{u}_1$  zugunsten von  $\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0$  verworfen wird und demnach nach einiger Zeit eine Menge von linear abhängigen Vektoren entstehen wird. Deswegen ist dieses Verfahren noch zu modifizieren.

Die flexibelste Methode besteht darin, das Verfahren in der Hinsicht abzuändern, daß man auf die quadratische Konvergenz verzichtet und stattdessen unter gewissen Umständen *nicht* die Richtung  $\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0$  als neue Richtung auswählt. Man schließt also die Richtung der größten Änderung aus den Betrachtungen aus, da sie wohl auch z.T. in dieselbe Richtung zeigt, wie die Richtung der größten Änderung aus dem vorhergehenden Iterationsschritt. Wenn man also diese Richtung ausschließt, werden die Chancen sehr groß sein, daß sich keine linearen Abhängigkeiten zwischen den Richtungen aufbauen. Manchmal kann es sogar sinnvoll sein, überhaupt keine neue Richtung auszuwählen. Ausgehend von den Definitionen

$$f_0 \equiv f(\mathbf{P}_0), \quad f_E \equiv f(\mathbf{P}_0 + 2(\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0))$$

kann man zunächst sagen, daß falls

$$f_E \geq f_0,$$

die Richtung  $\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0$  keine bessere Abschätzung des Minimums liefern kann und deswegen überhaupt keine neue Richtung zu der alten Menge hinzuzufügen ist. Ferner sei  $\Delta f$  der Betrag der größten Verringerung des Funktionswertes bei einer Linienminimierung im Laufe des aktuellen Iterationsschrittes. Ferner sei

$$f_N \equiv f(\mathbf{P}_N)$$

Wenn nun gilt

$$2(f_0 - 2f_N + f_E)((f_0 - f_N) - \Delta f)^2 \geq (f_0 - f_E)^2 \Delta f,$$

dann ist ebenfalls keine neue Richtung zur alten Menge hinzuzufügen, denn entweder

- geschah die Verringerung des Funktionswertes nicht aufgrund des Einflusses einer einzelnen Richtung, oder
- ist die zweite Ableitung entlang der Richtung  $\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_0$  signifikant groß und man befindet sich bereits in der Nähe des Minimums.

Dieses verbesserte Verfahren ist nun geeignet, um die Minimierung durchzuführen. Zwar ist es nicht mehr quadratisch konvergent, aber es zeigt sich, daß diese Eigenschaft für praktische Rechnungen in Rahmen des Sphaleronmodells nicht ins Gewicht fällt (siehe nächstes Kapitel).

### 3.5. Alternative numerische Methoden

In der Literatur sind auch andere Methoden vorgestellt worden, eine selbstkonsistente Lösung eines physikalischen Problems zu finden. Es sollen hier kurz einige Arbeiten vorgestellt werden, die die auftretenden Probleme mit anderen Mitteln gelöst haben und deren Bedeutung für diese Arbeit untersucht werden.

Wie später in Kapitel 4 noch deutlich wird, ist das Hauptproblem der untersuchten Fragestellung, daß der Vakuum Erwartungswert des Higgsfeldes nicht verschwindet. Der

Vakuumerwartungswert ist nicht invariant unter den  $SU(2)$ -Transformationen, unter denen der Lagrangian (2.4) invariant ist. Da die fermionischen Korrekturen jedoch in einem Kasten mit Radius  $R$  ausgerechnet werden, ist an den Rändern des Kastens ebenfalls die besagte Symmetrie zerstört. Dadurch wird allerdings der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes, der ja die fermionischen Massen generiert, ebenfalls an den Rändern des Kastens seinen Wert ändern müssen, d. h. es treten Kasteneffekte auf, die ein Relikt der Rechenmethode sind, aber keine direkte Bedeutung für die physikalische Fragestellung haben. Grundsätzlich wird man den Kasten auf jeden Fall größer als das Soliton wählen müssen, aber dennoch könnte die nicht-lokale Wirkung der Fermionendeterminante die Rechnungen beeinflussen.

Derartige Kasteneffekte sind in der Arbeit [27] aufgetreten, und dadurch ist der Gradient des  $H(x)$ -Feldes auch im trivialen Vakuum nicht Null gewesen (das  $H(x)$ -Feld besitzt ja im Vakuum den nichtverschwindende Erwartungswert des Higgsfeldes). In [29] ist der Ansatz gemacht worden, den Vakuumerwartungswert ortsabhängig zu machen. Dabei hat sich gezeigt, daß der Erwartungswert erst konstant ist, jedoch an den Rändern des Kastens gegen Null geht. Das Soliton muß in dem Bereich, in dem der Wert konstant ist, gesucht werden. Prinzipiell kann man dann untersuchen, ob das Soliton im Kasten mit der gesuchten Lösung (dem Soliton im Vakuum) übereinstimmt.

Diese Untersuchungen beziehen sich jedoch auf das Nambu-Jona-Lasinio-Modell, wo zwar prinzipiell ähnliche, jedoch einfachere Rechnungen, die numerisch nicht so aufwendig sind, durchgeführt werden. Eine Komplikation des in dieser Arbeit vorliegenden Problems besteht nämlich darin, daß die Ausdehnung des Solitons relativ groß ist (der korrekte  $H(x)$ -Gradient in [27] reicht noch bis  $10\tilde{m}_W^{-1}$  hinaus). Dieser Effekt ist nicht zu vernachlässigen, wenn man Solitonen im Kasten ausrechnet, d. h. man müßte Kasten-größen von über  $16\tilde{m}_W^{-1}$  wählen, um verlässliche Resultate zu erhalten. Da die Auswertung der Fermionendeterminante in der vorliegenden Arbeit jedoch wesentlich komplizierter ist, ist es auch viel schwieriger, mit derartig großen Kästen zu rechnen (da der Aufwand viel größer ist und sich die Rechnungen dadurch wesentlich verlängern würden).

Es gibt alternativ aber ebenfalls die Möglichkeit, dieses Problem zu ignorieren und mit einem konstanten Vakuumerwartungswert zu rechnen, indem man vom Gradienten einer Konfiguration jeweils den Vakuumsgradienten abzieht. Auf diese Art ist das Problem sowohl in [27] als auch in [30] gelöst worden. Allerdings zeigt sich in [30], daß die Konvergenz u. U. nicht sichergestellt ist, wenn das Soliton zu groß ist, selbst im einfacheren NJL-Modell. Daher ist zu befürchten, daß diese Methode bei dem vorliegenden Problem ebenfalls versagt hätte.

Die obengenannten Probleme sind in dieser Arbeit dadurch umgangen worden, daß der Gradient an keiner Stelle ausgerechnet wird. Das Powellverfahren wertet lediglich die Funktion selbst aus. Deswegen kann der Vakuumerwartungswert als konstant angesetzt werden, und die Rechnungen sind unabhängig von Kasteneffekten, da in Kapitel 3.2.1 die Parameter so gewählt wurden, daß die Kasteneffekte verschwinden. Der Preis für diese Vereinfachung ist allerdings, daß die Fermionendeterminante an jeder Stelle ausgewertet werden muß, also viel häufiger als bei Verfahren, die den Gradienten verwenden (siehe z. B. [29]). Dadurch ist leider insgesamt der Rechenaufwand deutlich höher, auch wenn der Kasten kleiner gemacht werden kann. Allerdings besteht hier nicht die Gefahr, daß

das Soliton innerhalb des Kastens sich vom Soliton im Vakuum unterscheidet.

#### 3.6. Zusammenfassung der numerischen Methoden

Durch Implementation der Verfahren in diesem Kapitel ist es nun möglich, das Energiefunktional (2.38) als Funktion der diskretisierten Felder  $A(x_i)$ ,  $B(x_j)$ ,  $C(\alpha, x)$ ,  $G(x_l)$  sowie  $H(x_m)$  (mit  $i = 1, \dots, n_a$ ,  $j = 1, \dots, n_b$ ,  $l = 1, \dots, n_g$  und  $m = 1, \dots, n_h$ ) aufzufassen. Somit erhält man eine Funktion von insgesamt  $n_a + n_b + n_g + n_h + 1$  Variablen, also mit den Werten aus Tabelle 3.1 insgesamt 87. Es stellt sich noch die Frage, was durch die Maßnahmen zur Beschleunigung der Auswertung der fermionischen Energie erreicht wurde. In der Praxis lag eine Auswertung von (2.29) auf einer RS/6000-Workstation Modell 37T (mit einem POWER2-Prozessor bei 25Mhz) bei einer Rechenzeit von 4310s. Mit den Verbesserungen der Auswertung braucht die Rechnung auf derselben Maschine nur noch 46s. Wenn man ferner die Kastengröße  $R$  auf den kleinen Wert  $10\tilde{m}_W$  setzt und die masselosen Fermionendoublets wegläßt, so liegt die Rechenzeit nur noch bei 16s. Dies wird im Folgenden getan, so daß die Rechenzeit für einen Minimierungsschritt nur noch in der Größenordnung von  $6h$  auf der besagten Maschine liegt. Somit ist die numerische Lösung des Problems möglich geworden. Wie sich diese in der Praxis gestaltet ist das Thema des folgenden Kapitels.

## 4. Ergebnisse

### 4.1. Wahl des Renormierungspunktes $\nu_{\text{ren}}$

Wie in Kapitel 2.5 bereits erwähnt wurde, sind die meßbaren Größen unabhängig vom Renormierungspunkt  $\nu_{\text{ren}}$ . Dies soll an dieser Stelle praktisch mit den in Kapitel 3 vorgestellten Mitteln nachgewiesen werden. Tabelle 4.1 zeigt für verschiedene Renormierungspunkte  $\nu_{\text{ren}}$  die sich mittels (2.34) ergebenden Bareparameter  $\nu_H$  und  $\nu_F$ . Ferner werden der Vakuumenergieerwartungswert des Higgsfeldes auf 1-loop-Niveau  $v_1$  und die Sphaleronenergie aus (2.39) dargestellt. Es wurden als physikalische Teilchenmassen folgende Werte genommen:

$$m_H = 83\text{GeV}$$

$$m_W = 83\text{GeV}$$

$$m_F = 175\text{GeV}$$

Es zeigt sich, daß die Ergebnisse tatsächlich unabhängig von der Wahl von  $\nu_{\text{ren}}$  sind. Der maximale Fehler beträgt 0.8% für  $v_1$  und 1.0% für  $E$ . Mithin kann man nahezu von einer Unabhängigkeit der Resultate von  $\nu_{\text{ren}}$  sprechen.

$\nu_{\text{ren}}$	$\nu_H$	$\nu_F$	$v_1/\text{GeV}$	$E/\text{GeV}$
1.5	1.17014	2.08188	252.9	8634
2	1.09329	2.0705	252.3	8670
2.5	1.03615	2.07372	251.9	8694
4	0.939684	2.0787	251.3	8725
6	0.891161	2.08101	251.0	8728
8	0.872033	2.08188	250.9	8721
12	0.857707	2.08252	250.9	8708

Tabelle 4.1.: Die Bare-Parameter  $\nu_H$  und  $\nu_F$  des Lagrangian (2.4) sowie die physikalischen Größen  $v_1$  (Gleichung (2.37)) und die Energie (2.39) der klassischen Sphaleronkonfiguration als Funktionen des Parameters  $\nu_{\text{ren}}$ .

## 4.2. Minimierung des klassischen Funktionals

Die in Kap. 3 besprochenen Methoden sollen zunächst exemplarisch auf die Minimierung des Funktionals (2.6) angewandt werden. Da dieses Funktional einfacher und schneller zu berechnen ist, können schnell viele Testläufe gemacht werden, die dann eventuelle Probleme aufzeigen können. Ein Vergleich mit dem Verfahren aus [11] bietet sich ebenfalls an. Als Parameter wurden die bare-Parameter  $\nu_H$  und  $\nu_F$  vorgegeben, und zwar wurde

$$\begin{aligned}\nu_H &= 0.8 \\ \nu_F &= 2.1\end{aligned}$$

gewählt. Dies entspricht auf 0-loop-Niveau folgenden physikalischen Größen:

$$m_H = 66.4\text{GeV}, \quad m_F = 174.3\text{GeV}$$

Für die Minimierung ist es ferner notwendig, die numerische Genauigkeit des Rechners, auf dem das Programm läuft, zu kennen (siehe Kapitel 3.4). Da einerseits jedoch die Genauigkeit, mit der das Funktional (2.39) ausgewertet werden kann, begrenzt ist (siehe Kapitel 3.2.1) und andererseits die Diskretisierung der Hedgehogfelder die Genauigkeit weiter limitieren, kann dieser Wert auch deutlich über der Maschinengenauigkeit liegen. Da dies jedoch nur die Abbruchbedingung für die Minimierung ist und die Zwischenschritte nicht beeinflusst, kann der Wert wiederum so angesetzt werden, daß das Programm von sich aus nicht abbricht, wenn es schon hinreichend nahe an dem Minimum ist (so nahe, daß weitere Schritte nur die Unzulänglichkeiten der verwendeten Näherungen ausbügeln, aber keine neuen physikalischen Aspekte finden lassen). Daher wurde für alle folgenden Rechnungen ein Wert von  $\sqrt{\epsilon} = 10^{-7}$  angesetzt.

Da das Minimierungsprogramm das Funktional (2.42) minimiert, ist es zusätzlich notwendig, den Parameter  $a$  anzugeben, der für die folgenden Rechnungen eine Größenordnung über der gesuchten Energie gewählt wurde. Im folgenden wurde daher generell ein Wert von  $a = 1000\tilde{m}_W$  gewählt.

Außerdem wurde in 2 beschrieben, daß die noch verbliebene Eichfreiheit dazu benutzt werden kann, daß das Profil des Feldes  $C(\alpha, x) = \alpha\bar{C}(x)$  auf einen einzigen Parameter  $\alpha$  reduziert werden kann. Diese Eichung wurde mit einer Funktion der Form

$$\bar{C}(x) = -280\pi \left(\frac{x}{s}\right)^4 \left(\frac{x}{s} - 1\right)^4$$

fixiert. Diese Form wurde in [27] gewählt und in dieser Arbeit übernommen, da sie den Vorteil hat, daß sie an den Punkten  $x = 0$  und  $x = s$  genügend oft differenzierbar ist. Hierfür ist noch die Größe  $s$  zu spezifizieren, die hier zu  $s = 3\tilde{m}_W^{-1}$  gewählt wurde. Diese Größe wurde in Übereinstimmung mit der früheren Arbeit [27] gewählt und ist auch schon in Kapitel 3 verwendet worden. Das Aussehen des  $\bar{C}(x)$ -Profils wird in Abb. 4.1 gezeigt. In dem folgenden Teil der Arbeit wird das  $\bar{C}(x)$ -Profil nicht mehr explizit geplottet, da es keine neuen Aussagen liefert. Außerdem wird die Größe  $\alpha$  nicht mehr gesondert angegeben, da sie keine physikalischen Aussagen liefert, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

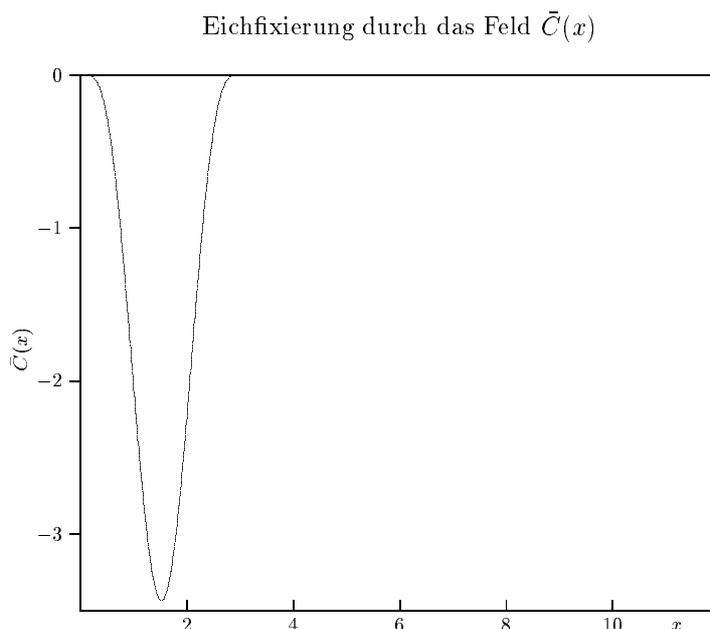


Abbildung 4.1.: Die Gestalt des Feldes  $\bar{C}(x)$ , so wie sie in dieser Arbeit durchgängig gewählt wurde. Die Einheit der Abszisse ist  $\tilde{m}_W^{-1}$ , die Ordinate ist dimensionslos.

#### 4.2.1. Verifikation der Vakuumkonfiguration

Als ersten Test des Verfahrens erscheint es sinnvoll, die Vakuumkonfigurationen mit  $N_{\text{CS}} = 0$  und  $N_{\text{CS}} = 1$  als Startkonfigurationen des Minimierungsalgorithmus auszuwählen und die Minimierung von (2.39) mit  $N_{\text{CS}}^{\text{targ}} = 0$  bzw.  $N_{\text{CS}}^{\text{targ}} = 1$  durchzuführen. Bereits nach wenigen Schritten sollte das Programm in der Lage sein, zu erkennen, daß die Lösung bereits gefunden ist.

Es zeigt sich, daß das Verfahren auch sofort die Vakuumkonfigurationen verifizieren kann. Tabelle 4.2 zeigt die Ergebnisse des Durchlaufes; es sind jeweils der Iterationsschritt und die zugehörige Energie angegeben.

#### 4.2.2. Verifikation der Sphaleronkonfiguration

Als einen weiteren Test erscheint es sinnvoll, zu untersuchen, ob es möglich ist, die Konfiguration minimaler Energie von (2.42) (im Fall von  $E_X = E_{\text{class}}$  aus (2.6)) für  $N_{\text{CS}}^{\text{targ}} = 0.5$  zu finden. Als Startkonfiguration wurde die Konfiguration gewählt, die mit dem Verfahren aus [11] gewonnen wurde. Auch hier zeigt sich sofort, daß das Minimierungsverfahren nach wenigen Schritten keine weitere Verbesserung finden kann. Das Ergebnis wird in 4.3 gezeigt. Es ist ferner auffällig, daß die Schritte hauptsächlich geringfügige Modifikationen der Splineinterpolation auszugleichen versuchen. Die grundsätzliche Schranke der Genauigkeit stellt somit die Splineinterpolation dar. Es ist allerdings ersichtlich, daß bei der in Tabelle 3.1 ermittelten Anzahl von Stützstellen das Minimierungsverfahren

$I$	$E_{\Sigma}^0/\tilde{m}_W$	$E_{\Sigma}^1/\tilde{m}_W$
0	$-0.1215 \cdot 10^{-3}$	0.0952
1	$-0.1947 \cdot 10^{-3}$	0.0945
2	$-0.1615 \cdot 10^{-3}$	0.0945
3	$-0.1616 \cdot 10^{-3}$	0.0945
4	$-0.1616 \cdot 10^{-3}$	0.0944

Tabelle 4.2.: Die Iterationsschritte zur Verifikation der Vakuumkonfiguration. Das zugrundeliegende Funktional ist hier (2.42). Die erste Spalte zeigt die Zahl der Iterationsschritte und die zweite Spalte die Ausgabe des Programms für  $N_{\text{CS}}^{\text{targ}} = 0$  und die dritte Spalte die Ausgabe für  $N_{\text{CS}}^{\text{targ}} = 1$ .

$I$	$E_{\Sigma}/m_W$
0	99.666
1	99.661
2	99.660
3	99.657
10	99.640
20	99.634
30	99.631
100	99.618
150	99.614
176	99.608
177	99.608
178	99.608

Tabelle 4.3.: Die Iterationsschritte zur Verifikation der Sphaleronkonfiguration. Das Funktional (2.42) ist in Einheiten von  $m_W$  als Funktion der Anzahl der Iterationsschritte tabelliert. Es wurden nicht alle Schritte tabelliert, da sich die Funktion nur unwesentlich ändert.

keine Instabilitäten aufweist. Andererseits wurde noch eine Menge an sich überflüssiger Schritte durchgeführt, die einzig und allein darauf zurückzuführen sind, daß als Abbruchbedingung der Suche gefordert wurde, daß die Funktion sich um weniger als  $\sqrt{\epsilon}$  ändern soll.

Die Felder der diskutierten Sphaleronkonfiguration sind in Abb. 4.2 graphisch dargestellt.

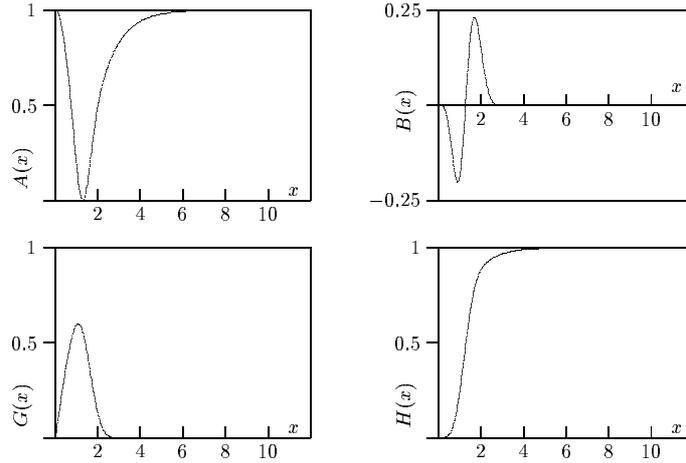


Abbildung 4.2.: Die Feldkonfiguration, die sich aus der Minimierung von (2.6) ergibt, wenn  $N_{CS} = 0.5$  ist. Die Einheit der Abszissen ist  $m_W^{-1}$ , die Felder  $A(x)$  und  $B(x)$  sind dimensionslos. Die Einheiten der Felder  $G(x)$  und  $H(x)$  sind jeweils  $m_W$ .

### 4.2.3. Minimierung aus verzerrter Anfangskonfiguration

Als besonders sensiblen Testfall bietet es sich an, die aus 4.2.2 bekannte Konfiguration zu verzerren und dann zu untersuchen, wie schnell die Ausgangskonfiguration wiedergefunden werden kann. Abbildung 4.3 zeigt die verzerrte Konfiguration. Die Konvergenz des Verfahrens wird in Abbildung 4.4 gezeigt. In der Tat ist eine große Anzahl von Schritten nötig, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Allerdings befindet man sich bereits nach wenigen Schritten bei einem Fehler im niedrigen Prozentbereich. Die gestrichelte Linie in Abbildung 4.4 zeigt die minimale Energie für die gewählten Parameter von  $E_{\text{class}} = 99.665m_W$ . Nach 100 Iterationsschritten (diese Zahl liegt in der Größenordnung der Zahl der Dimensionen) beträgt die Ausgabe des Programms immerhin nur noch  $E_{\Sigma} = 100.95m_W$ , d. h. der Fehler liegt in der Größenordnung von  $\simeq 1\%$ . Somit kann man noch von einer hinreichenden Genauigkeit sprechen, selbst wenn man von einer Startkonfiguration ausgeht, die weit von der richtigen Konfiguration entfernt liegt.

Somit scheint es nicht immer nötig zu sein, die Konvergenz wirklich bis zu  $\sqrt{\varepsilon}$  abzuwarten, wie es ein Minimierungsverfahren maximal ermöglichen würde (siehe Kapitel 3.4).

## 4.3. Minimierung des 1-loop-Funktional

Die numerische Untersuchung der elektroschwachen Sphaleronkonfiguration unter Berücksichtigung fermionischer Fluktuationen ist das eigentliche Ziel dieser Arbeit. Schaut man sich die Struktur von (2.38) an, so scheint der dominierende Anteil nach wie vor

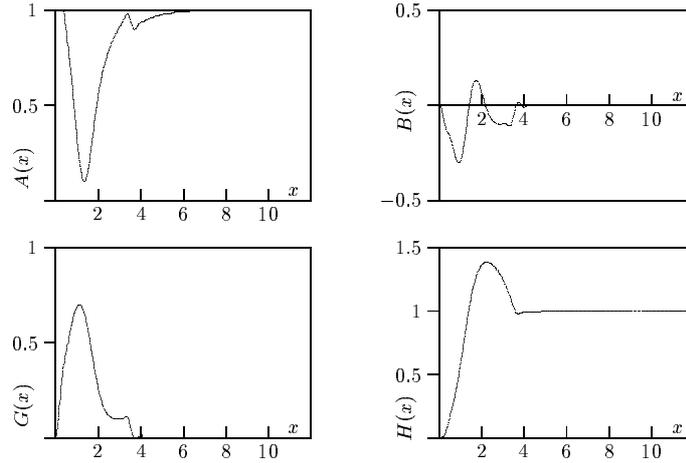


Abbildung 4.3.: Die verzerrte Anfangskonfiguration, wo alle 4 Hedgehog-Felder variiert wurden (vergleiche mit 4.2). Die Einheit der Abszissen sind  $m_W^{-1}$ , die Felder  $A(x)$  und  $B(x)$  sind dimensionslos, und die Felder  $G(x)$  und  $H(x)$  haben die Einheit  $m_W$ . Das Minimierungsverfahren soll aus dieser Konfiguration wieder die korrekte Anfangskonfiguration ermitteln. Die Windungszahl dieser Konfiguration beträgt  $N_{\text{CS}} = 0.469$ , und das Funktional (2.6) liefert  $E_{\text{class}} = 365.14m_W$ , das Funktional (2.42) liefert  $E_{\Sigma} = 1449.8m_W$ .

der klassische Term  $E_{\text{class}}$  zu sein. Die anderen Terme können als Korrekturen verstanden werden. Ausgehend von dieser Überlegung liegt es nahe, die gesuchte Konfiguration in der Nähe der Konfiguration zu suchen, die  $E_{\text{class}}$  allein minimieren würde. Die Minimalkonfiguration von (2.6) (natürlich mit den bare-Parametern, die durch die 1-loop-Renormierung bestimmt wurden) wird daher im Folgenden immer als Startwert gewählt.

### 4.3.1. Vakuumkonfigurationen

Zunächst soll wieder die Vakuumkonfiguration bei  $N_{\text{CS}} = 0$  untersucht werden. Da in (2.38) bereits durch den Zusatzterm das Energiefunktional so modifiziert wurde, daß das Vakuum die Energie 0 besitzt, dürfte der Minimierungsalgorithmus auch keine Konfigurationen negativer Energie finden.

Das triviale Vakuum stellt den einfachsten Test dar. Es wurde bei verschiedenen Higgs-massen und Renormierungspunkten untersucht. Das Ergebnis (die minimale Energie) nach einer entsprechenden Anzahl von Iterationsschritten ist in Tabelle 4.4 dargestellt. Es fällt auf, daß die minimale Energie keineswegs immer 0 ist. Dies ist genau dann nicht der Fall, wenn der numerische Wert von  $v_1$  sehr groß ist. Der physikalische Wert (der Vakuum Erwartungswert des Higgsfeldes) bleibt natürlich nach Tabelle 4.1 konstant, da ebenfalls noch die Renormierung der Energieskala zu berücksichtigen ist. Die Ursache ist offenbar, daß das Vakuum im Kasten nicht identisch mit dem Vakuum des Kontinuums

## Die Konvergenz des Powell-Verfahrens

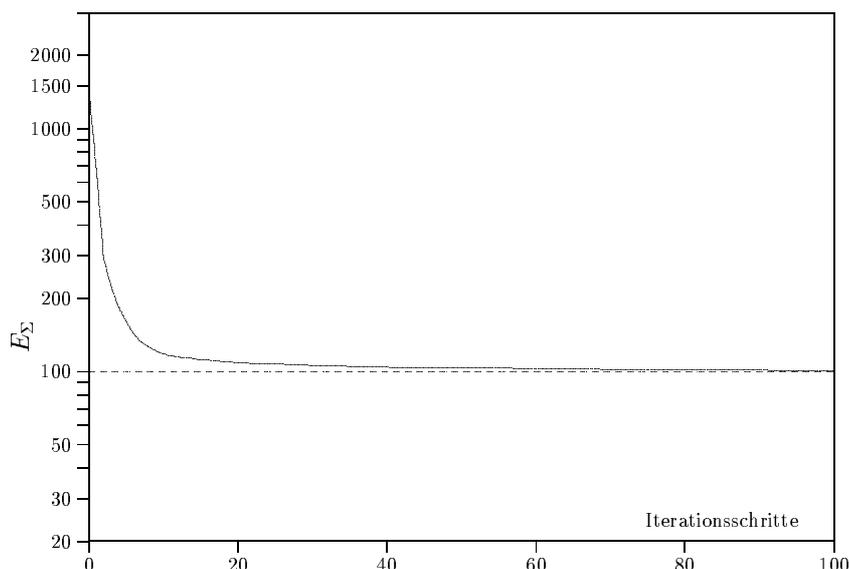


Abbildung 4.4.: Das Ergebnis des Energiefunktional (2.42) als Funktion der Iterationsschritte des Minimierungsverfahrens aus Kapitel 3.4. Die Ordinateneinheit ist  $\tilde{m}_W$ . Man sieht, daß bereits nach wenigen Schritten eine gute Konvergenz gewährleistet ist. Die gestrichelte Linie zeigt die korrekte Lösung von  $E_{\text{class}} = 99.665 m_W$ .

ist, da an den Rändern des Kastens die Symmetrien des Systems zerstört werden. Eine Auswirkung davon ist, daß  $v_1^{\text{numerisch}}$  vom Kontinuumslikes abweichen wird. Dieser Effekt ist ebenfalls recht deutlich in [27] beobachtet worden. Falls  $v_1$  nun deutlich größer als der 0-loop-Wert  $v = 2$  wird, wird die Abweichung  $v_1^{\text{numerisch}} - v_1^{\text{analytisch}}$  ebenfalls merklich, und dies wird sich in einer Verschiebung des Vakuums hin zu negativen Energien äußern. Um dieses Problem zu beheben, bieten sich verschiedene Methoden an:

- Man wählt  $\nu_{\text{ren}}$  so, daß  $v_1$  (natürlich in der Einheit von  $\tilde{m}_W$ ) immer recht nahe an 2 bleibt.
- Man wählt  $v_1$  als eine ortsabhängige Funktion  $v_1(x)$ . Dieser Weg ist in [29] besprochen worden und wird näher in Kap. 3.5 beleuchtet.
- Man bezieht die Sphaleronkonfiguration auf das numerische Vakuum.

In dieser Arbeit wird der letzte Weg besprochen. Da die Sphaleronkonfiguration nämlich immer in bezug auf das zugrundeliegende Vakuum bestimmt ist, kann sie auch auf ein Vakuum bezogen werden, für das (2.38) negative Energien liefert. Man muß nur die Vakuumenergie abziehen (bzw. den Betrag addieren) und erhält die korrekte Energie der Konfiguration. Dabei muß die Anzahl der Stützstellen natürlich genauso wie alle anderen Parameter des Systems konstant bleiben.

$m_H/\text{GeV}$	$n_H$	$\nu_H$	$\nu_F$	$v_1/\tilde{m}_W$	$\nu_{\text{ren}}$	$E_\Sigma/\tilde{m}_W$
44.3	31	0.8	2.1	2.011	2	-0.0162
83	31	1.09329	2.0705	2.18018	2	-0.1335
166	31	1.89294	2.08563	2.41785	6	-6.0444
166	31	1.99741	2.07145	2.0476	2	-0.0274
249	31	2.92126	2.0871	2.19641	6	-9.1005
249	31	2.95376	2.07164	2.02126	2	-0.0049
249	31	2.95376	2.07164	2.02126	2	-0.0486

Tabelle 4.4.: Die minimale Energie des Vakuums bei  $N_{\text{CS}} = 0$ . In einigen Fällen ist die minimale Energie  $E_\Sigma < 0$ . Dies ist bei zu großen Werten des numerischen Parameters  $v_1$  der Fall.  $n_H$  wurde in Tabelle 3.1 als zunächst noch freier numerischer Parameter angesehen und wurde hier in Übereinstimmung mit der späteren Tabelle 4.9 gewählt.

$I$	$E_\Sigma/\tilde{m}_W$
0	3.8058
1	3.8014
2	3.8013
3	3.8012
4	3.8010
5	3.8009

Tabelle 4.5.: Die Iterationsschritte zur Verifikation der minimalen Energie des Vakuums bei  $N_{\text{CS}} = 1.0$ . Es wurden nur 5 Schritte durchgeführt, da sich die Lösung offensichtlich nur noch geringfügig ändert.

### 4.3.2. Das nicht-triviale Vakuum

Das nicht-triviale Vakuum ist nur für den Fall der Parameter aus (4.1) untersucht worden. Hier ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß die Energie des Valenzfermions die Vakuumsenergie um  $m_T$  erhöhen wird. Schon aus diesem Grund ist dieses Vakuum nicht als Bezugspunkt für das Sphaleron geeignet. Daher ist hierfür das triviale Vakuum bei  $N_{\text{CS}} = 0$  gewählt worden. Tabelle 4.5 zeigt die Ergebnisse der ersten 5 Iterationsschritte. Offensichtlich findet das Programm auch in diesem Fall die korrekte Lösung wieder.

### 4.3.3. Sphaleronkonfigurationen

Analog kann nun die Konfiguration bei  $N_{\text{CS}} = 0.5$  untersucht werden. Zunächst kann man die Konfiguration, die sich bei der Minimierung des klassischen Funktionals ergibt, als Startkonfiguration der Rechnungen auf 1-loop-Niveau wählen. Tabelle 4.6 zeigt, wie

$I$	$E_\Sigma/\tilde{m}_W$
0	121.958
1	121.866
2	121.696
10	121.032
20	121.005
29	120.994

Tabelle 4.6.: Die Iterationsschritte zur Findung der selbstkonsistenten Lösung der Sphaleronkonfiguration bei  $N_{CS} = 0.5$  auf 1-loop-Niveau. Die Startkonfiguration ist die Lösung des klassischen Funktional aus 4.2. Wie sich zeigt, liegt die selbstkonsistente Lösung des Funktional (2.39) ganz in der Nähe der Lösung des Funktional (2.6) alleine.

sich das Energiefunktional dann minimiert (es werden wieder nur einige Zwischenschritte gezeigt). Die Energie hat sich dabei scheinbar um etwa 20% erhöht. Allerdings muß man hier berücksichtigen, daß die Massenskala nun nicht mehr  $m_W$ , sondern die renormierte  $W$ -Bosonenmasse  $\tilde{m}_W$  ist. Mit den Gleichungen aus Anhang C ist es möglich, die neue Massenskala aus den bekannten Bareparametern  $\nu_H = 0.8$ ,  $\nu_F = 2.1$  und  $\nu_{ren} = 2$  zu bestimmen. Man erhält

$$\tilde{m}_W = 1.231m_W$$

Somit gilt für die Energie in Tabelle 4.6  $E_\Sigma = 120.994\tilde{m}_W = 98.3m_W = 8159\text{GeV}$ . Durch die fermionischen Korrekturen ist die Energie also geringfügig abgesenkt worden. Es wird sich hinterher zeigen, daß dieses Bild ganz allgemein gültig ist, d. h. daß die Lösung des klassischen Funktional (2.6) eine hervorragende Näherung an die selbstkonsistente Lösung des Funktional (2.39) (mit denselben Bareparametern) ist.

Im Folgenden werden nicht mehr die einzelnen Schritte des Minimierungsverfahrens gezeigt, sondern nur noch der Wert, der sich nach einer hinreichenden Zahl von Rechenschritten als Grenzwert bildet. Der Fehler der Minimierung beträgt dann noch etwa  $\simeq 1\%$ , so daß diese Grenze die maximale Genauigkeit der folgenden Ergebnisse darstellt. Die Tabelle 3.1 zeigt die minimal sinnvolle Verteilung der Stützstellen für diese Konfiguration. Diese wurde ebenfalls für das Vakuum in Tabelle 4.4 zugrunde gelegt. Allerdings ist der Parameter  $n_h$  zunächst noch nicht näher festgelegt. Es stellt sich die Frage, wie weit das  $H(x)$ -Profil sich noch ändern kann. Das Resultat der Arbeit [27] zeigt, daß sich der Gradient auch noch bei etwa  $10\tilde{m}_W^{-1}$  ändert. Von daher ist zu befürchten, daß es notwendig ist, bei den Rechnungen zu erlauben, daß sich  $H(x)$  auch bei großen  $x$ -Werten (in der Größenordnung von  $10\tilde{m}_W^{-1}$ ) noch ändert. Andererseits würde ein großer Wert von  $n_h$  jedoch einen großen Wert des Parameters  $R$  (siehe 3.2.1) erfordern, der wiederum eine große Zunahme der Rechenzeit bedeuten würde. Die Ergebnisse von Rechnungen mit variablem  $n_h$  in Tabelle 4.7 zeigen, daß sich zwar die einzelnen Terme in dem Ener-

$n_h$	$E_{\text{class}}$	$E_{\text{vac}}$	$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}$	$E_{\Sigma}$
29	139.239	-52.497	46.786	120.994
35	126.103	-40.776	35.504	120.920
45	125.724	-31.120	26.640	121.244
51	125.606	-28.619	24.351	121.351

Tabelle 4.7.: Die Abhängigkeit der Terme in (2.39) als Funktion von  $n_h$ . Gezeigt sind die selbstkonsistenten Lösungen zu  $N_{\text{CS}} = 0.5$  bei den Parametern  $n_a = 31$ ,  $n_b = 15$  und  $n_g = 17$ . Die Einheiten der Energien sind  $\tilde{m}_W$ .

$n_a$	$n_b$	$n_g$	$n_h$	$\Delta I$	$E_{\text{class}}$	$E_{\text{vac}}$	$E_{\text{ferm}}^{\text{ren}}$	$E_{\Sigma}$
31	21	21	35	10	126.193	-40.776	35.504	120.921
59	43	43	59	5	126.412	-40.435	34.973	120.950
149	109	109	149	2	126.407	-40.470	35.008	120.945

Tabelle 4.8.: Die Abhängigkeit der selbstkonsistenten Lösung von der Zahl und der Auflösung der Gitterpunkte. Die Einheit der Energien ist  $\tilde{m}_W$ .

giefunktional (2.39) noch merklich ändern können, diese Änderung jedoch keinen Einfluß mehr auf die Gesamtenergie hat.

Ab jetzt wurden die Rechnungen mit einem  $n_h = 31$  durchgeführt. Zwar stellt dieser Parameter noch nicht den gesamten Bereich dar, in dem sich das  $H(x)$ -Profil bei der selbstkonsistenten Lösung ändert, doch hat diese Änderung keinen großen Einfluß auf das Endergebnis. Die niedrige Wahl von  $n_h$  stellt somit einen Kompromiß zwischen Rechenzeit und Genauigkeit der Ergebnisse dar.

Schließlich ist es noch interessant, zu untersuchen, inwieweit die Auflösung der Stützstellen und deren Zahl ausreicht, um die selbstkonsistente Lösung zu erfassen. Dies läßt sich prüfen, wenn man die Minimierung mit dem ermittelten minimalen Parametersatz durchführt und anschließend die Zahl der Stützstellen erhöht und deren Abstand vermindert. Tabelle 4.8 zeigt Ergebnisse, die allerdings nur (wegen der großen Dimension des Problems) bis zu einem  $\Delta I = 2$  durchgeführt werden konnten. Es zeigt sich, daß der gewählte Parameterbereich (mit  $\Delta I = 10$ ) ausreicht, um auch die selbstkonsistente Lösung zu erfassen, wenn man von dem Problem der Wahl von  $n_h$  absieht.

Schließlich stellt sich die Frage, ob die selbstkonsistente Lösung, die das Programm findet, auch mit den Resultaten aus [27], wo der Gradient der Felder, d. h. die Richtung der größten Änderung bestimmt wurde, übereinstimmt. Dies ist nur ein grober qualitativer Test, da hier ja nie der Gradient selbst ausgerechnet wurde. Allerdings ist es möglich, die Differenz zwischen der selbstkonsistenten Lösung und der Startkonfiguration zu be-

stimmen. Nach der Definition einer Funktionaldifferenziation (vergl. [4])

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi + \epsilon \delta(x-y)] - F[\phi]}{\epsilon}$$

ist der Gradient ungefähr proportional zu der besagten Differenz, falls die Minimierung in die Richtung der größten Änderung gegangen ist und die Endkonfiguration in unmittelbarer Nähe der Startkonfiguration liegt. Das Minimierungsverfahren sollte auf jeden Fall in die Richtung der größten Änderung gehen (wie z. B. aus Tabelle 4.6 ersichtlich ist, liegt die selbstkonsistente Lösung in der Tat in der Nähe der klassischen). Die Abbildung 4.5 zeigt die Differenzen zwischen selbstkonsistenter Lösung und klassischer Lösung. Ein Vergleich mit dem Gradienten aus [27] zeigt, daß die Kurven ähnlich aussehen. Allerdings ist die selbstkonsistente Lösung bereits ein Stück weiter entfernt als der tatsächliche Gradient, so daß die Kurven nicht exakt übereinstimmen. Dieser Vergleich ist jedoch nur eine ganz grobe Konsistenzprüfung und keineswegs ein verlässlicher Beweis, daß die Berechnungen korrekt sind. Da sich allerdings in den bisherigen Rechnungen immer eine gute Konvergenz eingestellt hat und keine überraschenden numerischen Effekte aufgetreten sind, kann man davon sprechen, daß das betrachtete Verfahren wirklich in der Lage ist, die korrekte selbstkonsistente Lösung zu finden.

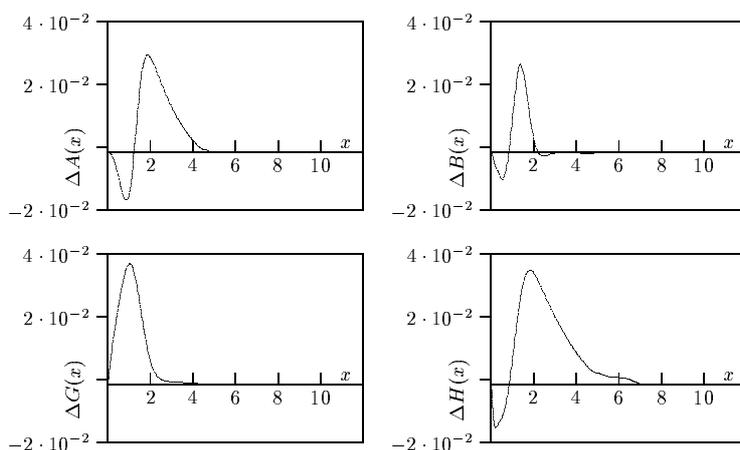


Abbildung 4.5.: Die Differenzen der Start- und der Endkonfigurationen bei einer Minimierung. Die Einheiten der Ordinaten sind  $\tilde{m}_W^{-1}$ , die Abszissen der Felder  $A(x)$  und  $B(x)$  sind dimensionslos, die Felder  $G(x)$  und  $H(x)$  tragen die Dimension  $\tilde{m}_W$ . Die Unterschiede (Größenordnung  $10^{-2}$ ) sind zwar gering, erlauben jedoch einen Vergleich mit dem Gradienten aus der Arbeit [27]. Es stellt sich heraus, daß das Aussehen der Kurven ähnlich ist.

Nachdem also ein sinnvoller Satz von Parametern gefunden wurde, mit deren Hilfe die selbstkonsistente Lösung in akzeptabler Rechenzeit mit einem Fehler in der Größenordnung von  $\simeq 1\%$  bestimmt werden kann, können nun physikalisch interessante Fälle untersucht werden. Das Ziel dieser Arbeit ist es ja, die Sphaleronenergie als Funktion der

$m_H/\text{GeV}$	$\nu_H$	$\nu_F$	$\nu_{\text{ren}}$	$v_1/\tilde{m}_W$	$E_{\Sigma,0}/\tilde{m}_W$	$E_{\Sigma}/\tilde{m}_W$	$E_{\text{sphal}}/\text{GeV}$
83	1.09329	2.0705	2	2.18018	113.524	112.779	8746
124.5	1.53189	2.07118	2	2.08364	113.99	113.31	9189
166	1.89294	2.08563	6	2.41785	130.538	124.332	9050
249	2.92126	2.0871	6	2.19641	123.834	114.265	9419
415	4.94706	2.07784	3	2.01199	125.877	125.829	10534
166	1.99741	2.07145	2	2.0476	115.094	113.386	9356
249	2.95376	2.07164	2	2.02126	117.738	117.711	9839

Tabelle 4.9.: Die selbstkonsistente Lösung bei verschiedenen Higgsmassen. Es sind die Bareparameter wie in Tabelle 4.4 gewählt. Die 6. Spalte zeigt die Energie der Startkonfigurationen. Es ist zu beachten, daß die Lösungen auf das entsprechende Vakuum zu beziehen sind. Diese Korrektur war bei den letzten beiden Zeilen notwendig, die letzte Spalte zeigt die Energie in GeV nach der Korrektur.

Higgsmasse auszurechnen. Hierfür wird im folgenden mit den bekannten physikalischen Parametern

$$m_W = 83\text{GeV}, \quad m_T = m_F = 175\text{GeV}$$

gerechnet. Der Renormierungspunkt wird in der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  gewählt, und die Bareparameter werden mit dem Gleichungssystem (2.34) ermittelt. Als Startkonfiguration wird die klassische Lösung mit den ermittelten Bareparametern ausgewählt, also die nichtselbstkonsistente Lösung. Tabelle 4.9 zeigt die Ergebnisse dieser Rechnungen. Es ist zu beachten, daß dort das entsprechende Vakuum abgezogen werden muß. Die vorletzte Spalte zeigt zwar die Ausgabe des Programmes, aber um die endgültige Sphaleronenergie zu erhalten, muß man von dem tabellierten Wert den Vakuumwert aus Tabelle 4.4 mit denselben Bareparametern abziehen. Die letzten beiden Zeilen in Tabelle 4.9 zeigen Fälle, in denen diese Korrektur notwendig ist. Die Minimierung verringert die Energie der Startkonfiguration recht deutlich. Die letzte Spalte zeigt den entsprechend korrigierten Wert, der bereits in GeV umgerechnet wurde. In den anderen Fällen ist die Ausgabe des Programmes direkt der gesuchte Wert. Allerdings ist der Fehler im Vergleich zur Rechnung mit der „falschen“ Vakuumkonfiguration immerhin in der Größenordnung von  $\simeq 4\%$ , was eigentlich jenseits der Genauigkeit der gemachten Näherungen liegen sollte. Es ist daher zu unsicher, Sphaleronkonfigurationen zu verwenden, die auf einem Vakuum aufbauen, dessen Minimum im Parameterbereich der Rechnung deutlich kleiner ist als Null.

Aus Tabelle 4.9 wird ferner deutlich, daß die Energien der Start- und der Endkonfigurationen recht gut übereinstimmen und die Selbstkonsistenz die Energien nur sehr gering beeinflusst. Genaugenommen liegt der Einfluß sogar unterhalb der Genauigkeit, den die Numerik zuläßt. Somit kann man sagen, daß durch die Minimierung keine wesentliche Verbesserung durchgeführt werden konnte, und es als Näherung zulässig ist, nur

die klassische Lösung mit der Energie (2.6) mit den 1-loop-Bareparametern, die durch (2.34) ermittelt wurden, zu betrachten. Diese Konfiguration ist dann natürlich in (2.39) einzusetzen. Die Lösung ist die gesuchte Energie.

Es stellt sich nun noch die Frage, wie groß der maximale Fehler ist, der bei diesen Rechnungen gemacht wird. Es ist deutlich geworden, daß die gemachten Näherungen zur Auswertung der Fermionfluktuationen einen Fehler kleiner als 1% besitzen. Das Minimierungsverfahren hat selbst einen Fehler von etwa 1%, der hauptsächlich darauf zurückzuführen ist, daß die Felder nur durch eine geringe Anzahl von Stützstellen dargestellt werden können, um die Rechenzeit in einer akzeptablen Größenordnung zu halten. Des weiteren wurde bisher völlig vernachlässigt, daß die fermionischen Fluktuationen nicht symmetrisch sind (im Vakuum bei  $N_{CS} = 1$  gibt es ja die Energie des Valenzfermions). Daher ist zu befürchten, daß die tatsächliche Sphaleronkonfiguration (d. h. die Konfiguration, die den höchsten Punkt auf dem Pfad minimaler Energie bei einem Übergang von  $N_{CS} = 0$  zu  $N_{CS} = 1$  darstellt) nicht bei  $N_{CS} = 0.5$  liegt, sondern bei einem  $N_{CS} = 0.5 + \epsilon$  mit  $0 < \epsilon \leq 0.1$ . Dies wird auch durch den Graphen 3 in [11] gestützt. Andererseits sind die zu erwartenden Abweichungen recht klein; im Hinblick auf die obigen Ergebnisse ist zu vermuten, daß der Fehler allerhöchstens so groß ist wie die halbe Energie des Valenzfermions, und dies wäre weniger als 1%. Wenn man sämtliche möglichen Fehlerquellen nun aufaddiert (Auswertung der Fermionanteile, vereinfachte Darstellung der Felder und falsches  $N_{CS}$ ), so dürfte der gemachte Fehler maximal in der Größenordnung von  $\simeq 2\%$  liegen. Dies ist in Anbetracht der Tatsache, daß das Problem ohne die Näherungen überhaupt nicht zu behandeln wäre, durchaus akzeptabel.

Schließlich bietet es sich an, die gefundenen Lösungen mit den Lösungen des klassischen Funktionals zu vergleichen. Diese sind bereits in der Literatur oft diskutiert worden (siehe z. B. [10]) und methodisch auch schon in dieser Arbeit herangezogen worden. Tabelle 4.10 zeigt die Energien in GeV als Funktion der Higgsmasse. Die Abbildung 4.6 zeigt Tabelle 4.10 in graphischer Form, wobei für die selbstkonsistente fermionische Lösung die Fehlerbalken so eingezeichnet wurden, daß sie Fehler von 2% in jeder Richtung implizieren. Dies ist der maximale Fehler, den die Werte aus Tabelle 4.9 haben dürften, wenn man nur Werte, die sich auf das korrekte Vakuum beziehen, zuläßt.

Abschließend kann man sagen, daß die Energie des Sphalerons durch die 1-loop-Korrekturen im selbstkonsistenten Fall um etwa  $\simeq 2.5\%$  erhöht wird und noch immer eine ähnliche Abhängigkeit der Sphaleronenergie von der Higgsmasse besteht (siehe [10]):

$$E_{\text{sphal}} = \frac{8\pi m_W}{g^2} B\left(\frac{m_H}{m_W}\right),$$

wobei  $B(m_H/m_W)$  monoton von 1.56 auf 2.72 steigt, wenn  $m_H/m_W$  von Null auf Unendlich steigt. Dieses Skalengesetz wurde in [31] gefunden. Dieser Zusammenhang wird durch Selbstkonsistenz anscheinend nur geringfügig modifiziert.

## 4.4. Zusammenfassung der Ergebnisse

Es hat sich gezeigt, daß es in der Tat möglich ist, mit den gemachten Vereinfachungen die selbstkonsistente Lösung des Sphalerons unter Berücksichtigung fermionischer Korrek-

$m_H/\text{GeV}$	$E_{\text{sphal,class}}/\text{GeV}$	$E_{\text{sphal,1-loop}}/\text{GeV}$	$\Delta E_{\text{sphal}}/\%$
83	8461	8746	3.26
124.5	8864	9189	3.54
166	9185	9356	1.74
249	9674	9839	1.71
415	10312	10534	2.15

Tabelle 4.10.: Vergleich der Sphaleronenergien der selbstkonsistenten 1-loop-Lösung und der klassischen Lösung als Funktion der Higgsmasse. Der Einfluß der fermionischen Korrekturen ist offenbar gering. Die letzte Spalte zeigt die Erhöhung der Energie durch die fermionischen Korrekturen in %.

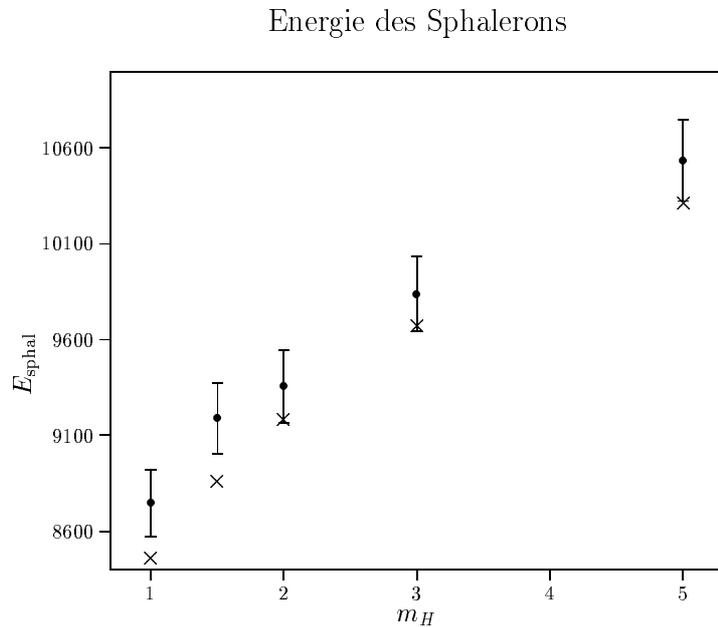


Abbildung 4.6.: Graphischer Vergleich der Sphaleronenergie bei klassischer und selbstkonsistenter 1-loop-Rechnung. Die Abszisseneinheit ist  $m_W = 83\text{GeV}$  und die Ordinateneinheit ist GeV. Für die 1-loop-Rechnungen (die Werte werden durch Punkte dargestellt) wurden Fehlerbalken eingezeichnet, die einem Fehler von 2% in jeder Richtung entsprechen. Die Kreuze entsprechen den Ergebnissen der klassischen Lösung.

turen zu finden. Ausgehend von der Minimierung des klassischen Anteils des Funktionals (mit den 1-loop-Bareparametern), findet man, daß sich die Energie der selbstkonsistenten Lösung nur um etwa 1 – 2% von der Energie der nichtselbstkonsistenten Lösung unterscheidet. Im Vergleich zur klassischen 0-loop-Lösung ist insgesamt festzustellen,

daß sich die Energie auf 1-loop-Niveau um etwa 2.5% erhöht, jedoch ansonsten keine neuen physikalischen Effekte auftreten.

Nachdem nun ein hoher Rechenaufwand betrieben wurde, ist klar geworden, daß eine Korrektur durch die selbstkonsistente Lösung nicht zwingend notwendig erscheint und so die nichtselbstkonsistente Lösung als hinreichend betrachtet werden kann.



## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ist gezeigt worden, daß es möglich ist, die Energie der Sphaleronkonfiguration auch mit fermionischen Fluktuationen auf 1-loop-Niveau selbstkonsistent zu berechnen. Es ist ein Verfahren vorgestellt worden, das nur mit der Auswertung eines Energiefunktionalen arbeitet und keine Berechnung des Gradienten erfordert. Dadurch mußten Abstriche sowohl in der Rechenzeit als auch in der Genauigkeit der Ergebnisse gemacht werden. Im Vergleich zu anderen Verfahren mit Gradientenberechnung ist das vorgestellte Verfahren jedoch nicht so stark von der Existenz eines Kastens beeinflusst, wie dies in anderen Arbeiten der Fall ist. Um das Problem auf den vorhandenen Computern behandeln zu können, mußten mehrere Verfahren entwickelt werden, die die Rechenzeit bei denselben Parametern um einen Faktor 100 reduzieren konnten.

Es hat sich gezeigt, daß die Korrekturen durch die Fermionen auf 1-loop-Niveau gering sind, selbst wenn man die volle selbstkonsistente Lösung heranzieht. Die Unterschiede zwischen der selbstkonsistenten Minimierung und der rein klassischen Minimierung mit anschließender Addition der fermionischen Korrekturen sind in der Größenordnung von etwa 1–2%. Somit hat diese Arbeit gezeigt, daß es bei Temperatur  $T = 0$  nicht notwendig ist, die Selbstkonsistenz zu berücksichtigen. Eine weitere interessante Fragestellung ist jedoch, wie die selbstkonsistente Lösung im Falle nicht-verschwindender Temperaturen aussieht. Die Ergebnisse dieser Arbeit legen nahe, daß es nicht zu erwarten ist, daß die Berücksichtigung der Selbstkonsistenz bei endlichen Temperaturen eine Rolle spielt. Es ist möglich, das hier vorgestellte Verfahren ebenfalls auf diese Fragestellung anzuwenden. Man müßte hierzu das Energiefunktional (2.39) um die entsprechenden Terme erweitern und das Programm entsprechend anpassen. Allerdings käme dann als neuer Parameter die Temperatur ins Spiel, und man müßte die Minimierung für verschiedene Temperaturen durchführen, um sicherstellen zu können, daß man sinnvolle Resultate erhält. Damit würde der Rechenaufwand wieder extrem groß werden. Dies konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden. In der Arbeit [32] ist diese Rechnung allerdings mit anderen Mitteln (einer Näherung für hohe Temperaturen) ausgeführt worden.

Zum Vergleich mit den Ergebnissen aus [11] ist allerdings anzuführen, daß dort die Massenrenormierung nicht korrekt durchgeführt wurde, und auch in [33, 12] ist nur die Higgsmasse renormiert worden, die wesentlich wichtigere Renormierung der Energieskala  $m_W$  wurde jedoch nicht durchgeführt. Daher sind die Ergebnisse dieser Arbeit alle noch mit einem entsprechenden Faktor zu korrigieren. Für nähere Diskussionen zu dieser Thematik siehe [34].

Für zukünftige Arbeiten blieben Untersuchungen zur selbstkonsistenten Behandlung im Falle von Bosonenfluktuationen (einschließlich der Faddeev-Popov-Teilchen), auch wenn

die Einflüsse hier nur relativ gering zu sein scheinen, da die Bosonfluktuationen kaum die rein klassische Lösung beeinflussen (siehe wiederum [34]).

Ebenfalls interessant ist die Fragestellung, wie die Sphaleronen in anderen Theorien aussehen würden. Möglich wäre es, im Rahmen des MSM die Sphaleronen im  $SU(3)_C$ -Sektor, also der QCD zu untersuchen. Aber auch in Erweiterungen des SM sollten diese nichtperturbativen Effekte auftreten. Sphaleronen im  $SU(2)$ -Sektor des minimalen supersymmetrischen Standardmodells wurden in [35] untersucht. Dort hat sich gezeigt, daß die Ergebnisse nur geringfügig von denen im Fall des MSM abweichen, obwohl dort 2 komplexe Higgsdoublets herangezogen werden müssen. Ebenfalls denkbar wäre es, Sphaleronen für Supergravitationstheorien zu untersuchen, allerdings entfernen sich diese Betrachtungen immer mehr von den aktuellen experimentellen Möglichkeiten und die Ergebnisse wären zum jetzigen Zeitpunkt eher von rein theoretischem Interesse.

# Anhang



# A. Notation

## A.1. Minkowski-Metrik

In dieser Arbeit wurde stets in natürlichen Einheiten gerechnet, d. h.

$$\hbar = c = 1 \tag{A.1}$$

Die kontravarianten Komponenten eines Vektors im Minkovskiraum wurden mit hochgestellten griechischen Indizes bezeichnet:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Mittels des metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lassen sich die kovarianten Komponenten definieren:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Euklidische Vektoren wurden durch lateinische Buchstaben gekennzeichnet. Hier sind die kontra- und kovarianten Komponenten eines Vektors identisch, deswegen ist keine Unterscheidung notwendig. Laut der Einsteinschen Summenkonvention ist über gleiche Indizes in einem Produkt zu summieren.

Die in der Dirac-Gleichung auftauchenden  $\gamma$ -Matrizen sind über die Antivertauschungsrelationen (sie bilden eine Clifford-Algebra)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.2}$$

definiert. Ferner ist die Matrix  $\gamma^5$  definiert durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.3}$$

In dieser Arbeit wurde folgende Darstellung gewählt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## A.2. Euklidische Metrik

Der Übergang von der Minkowskimetrik zur Euklidischen Metrik wird durch eine Wick-Rotation um  $\pi/2$  realisiert (siehe z. B. [4]). Dabei geht man von einem Vektor im Minkowskiraum  $x_\mu = (x_0, \vec{x})$  zu einem euklidischen Vektor über  $x_{E\mu} = (\vec{x}_E, x_4)$  mittels der Definition

$$x_4 = ix_0, \quad \vec{x}_E = \vec{x}$$

Die quadrierte Norm eines solchen Vektors ist

$$x_{E\mu}x_E^\mu = -x_\mu x^\mu$$

Bei der euklidischen Metrik

$$g_E^{\mu\nu} = -\delta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist ersichtlich, daß die kovarianten und die kontravarianten Koordinaten eines Vektors bis auf das Vorzeichen identisch sind:  $x_{E\mu} = -x_E^\mu$ .

Euklidische Impulsvektoren sind definiert durch  $p_{E\mu} = (\vec{p}_E, p_4)$  mittels

$$p_4 = -ip_0, \quad \vec{p}_E = \vec{p}$$

Die Norm des Impulsvektors ist

$$p_{E\mu}p_E^\mu = -p_\mu p^\mu$$

und das Skalarprodukt für euklidische 4-Vektoren ist  $p_{E\mu}x_E^\mu = p_0x_0 + \vec{p} \cdot \vec{x}$ , was nicht mit  $p_\mu x^\mu = p_0x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$  übereinstimmt.

Für das Volumenelement gilt

$$d^4x = -id^4x_E, \quad d^4p = id^4p_E.$$

Treten in der Theorie Vektorfelder  $A^\mu(x)$  auf, so ist deren Verhalten unter Wick-Rotation wie folgt definiert:

$$A_4(x_E) = -iA_0(x), \quad \vec{A}_E(x_E) = \vec{A}(x)$$

Durch die Forderung, daß die  $\gamma$ -Matrizen immer noch der Clifford-Algebra  $\{\gamma_{E\mu}, \gamma_{E\nu}\} = 2g_{E\mu\nu}$  genügen sollen, erhält man die neue Definition der euklidischen  $\gamma_E$ -Matrizen

$$\gamma^0 = -i\gamma_E^4, \quad \gamma^i = \gamma_E^i,$$

wobei die hermitesche Konjunktion nun folgendermaßen aussieht:

$$\gamma_{E\mu}^\dagger = -\gamma_{E\mu}$$

Die sich ergebenden physikalischen Gesetze im euklidischen Raum sind invariant unter  $O(4)$ -Transformationen. Diese haben 6 freie Parameter und sind analog zu den Lorentztransformationen anzusehen (die ebenfalls 6 freie Parameter besitzen, jedoch eine  $SO(3,1)$ -Gruppe bilden).

## B. Eigenwerte des Hamiltonoperators

Hier sollen die Eigenwerte des Hamiltonoperators berechnet werden. Als nützlich hierfür erweist sich die Tatsache, daß  $\mathcal{H}$  mit dem schon oben vorgestellten Grand-Spin-Operator  $\hat{\mathbf{K}}^2$  vertauscht. Es gilt

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}, \quad (\text{B.1})$$

wo  $\hat{\mathbf{L}}$  der Drehimpuls-,  $\hat{\mathbf{S}}$  der Spin- und  $\hat{\mathbf{T}}$  der Isospin-Operator ist:

$$\hat{L}^a = -i\epsilon^{abc}x_b\partial_c, \quad \hat{S}^a = \frac{1}{2}\sigma^a, \quad \hat{T}^a = \frac{1}{2}\tau^a$$

Ferner wird der Gesamtdrehimpulsoperator durch  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  definiert. Damit kann  $\mathcal{H}$  in einer Basis von sphärischen Besselfunktionen diagonalisiert werden, wobei die Eigenzustände durch die Eigenwerte  $K$  und  $K_3$  sowie  $J$  und  $L$  charakterisiert werden. Dies werden ebenfalls Eigenzustände von  $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{\mathbf{T}}^2 = 3/4$  sein. Diese Zustände sollen nun mit  $|K, J, L, K_3\rangle$  bezeichnet werden. Da jedoch nur die Operatoren  $\hat{\mathbf{K}}^2$  und  $\hat{\mathbf{K}}_3$  mit  $\mathcal{H}$  vertauschen, nicht jedoch  $\hat{\mathbf{L}}^2$  oder  $\hat{\mathbf{J}}^2$ , werden sich Zustände in (2.20) mit verschiedenem  $J$  und  $L$  bei gegebenem  $K$  und  $K_3$  vermischen. Im allgemeinen hat man eine Superposition der folgenden Zustände:

$$\begin{aligned} &|K, K + 1/2, K + 1, K_3\rangle, & |K, K + 1/2, K, K_3\rangle \\ &|K, K - 1/2, K, K_3\rangle, & |K, K - 1/2, K - 1, K_3\rangle \end{aligned}$$

Die Felder  $\psi_L$  und  $\psi_R$  können nun nach diesen Funktionen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \psi_L(\mathbf{r}) &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{K_3=-K}^K \sum_{J=K-1/2}^{K+1/2} \sum_{L=J-1/2}^{J+1/2} i^L f_{JL}^{KK_3}(r) \langle \Omega | K, J, L, K_3 \rangle \\ \psi_R(\mathbf{r}) &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{K_3=-K}^K \sum_{J=K-1/2}^{K+1/2} \sum_{L=J-1/2}^{J+1/2} i^L g_{JL}^{KK_3}(r) \langle \Omega | K, J, L, K_3 \rangle \end{aligned}$$

Somit mischen in (2.20) vier Funktionen  $f$  (aus  $\psi_L$ ) und vier Funktionen  $g$  (aus  $\psi_R$ ) für jeden Wert von  $K$  und  $K_3$ . Somit treten für jedes  $K > 0$  insgesamt 8 Zustände auf (4 für  $K = 0$ ). Der Hamiltonoperator in Matrixdarstellung ist nun blockdiagonal bez.  $K_3$ . Zur Berechnung der Matrixelemente setzt man nun die Entwicklung (B.2) in (2.20) ein und benutzt die Darstellung des Hamiltonoperators in dieser Basis. Dies ist in [11, 22, 9] ausführlich vorgenommen worden. Hier sollen nur die Ergebnisse vorgestellt werden. Im Ortsraum wird (2.20) zu

$$\int d^3r' \langle r | \mathcal{H} | r' \rangle \psi(r') = E\psi(r) \quad (\text{B.2})$$

Setzt man nun in (B.2) die Entwicklung (B.2) und fügt

$$1 = \sum_{K', K'_3, J', L'} |K', J', L', K'_3\rangle \langle K', J', L', K'_3|$$

ein, so folgt schließlich

$$\sum_{K, K_3, J, L} i^{L-L'} \langle K', J', L', K'_3 | \mathcal{H} | K, J, L, K_3 \rangle \begin{pmatrix} f_{JL}(r) \\ g_{JL}(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} f_{J'L'}(r) \\ g_{J'L'}(r) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Somit kann man die Gleichung (B.2) für jedes  $K$  als Matrixgleichung der Form

$$\mathcal{H}_K V_K = E V_K \quad (\text{B.4})$$

schreiben, wobei mit  $V_K$  der folgende 8-Vektor bezeichnet wird:

$$V_K = \begin{pmatrix} f_{K+1/2, K+1}, f_{K+1/2, K}, f_{K-1/2, K}, f_{K-1/2, K-1}, \\ g_{K+1/2, K+1}, g_{K+1/2, K}, g_{K-1/2, K}, g_{K-1/2, K-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Unter  $\mathcal{H}_K$  ist die folgende Matrix einzutragen

$$\mathcal{H}_K = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_K + \mathcal{V}_K & \mathcal{W}_K \\ \mathcal{W}_K^\dagger & -\mathcal{D}_K \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

wobei die Untermatrizen  $4 \times 4$ -Matrizen sind:

$$\mathcal{D}_K = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dx} + \frac{K}{x} & 0 & 0 \\ \frac{d}{dx} + \frac{K+2}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} + \frac{K+1}{x} \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} + \frac{K+1}{x} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Die Matrizen  $\mathcal{V}_K$  und  $\mathcal{W}_K$  sind  $4 \times 4$ -Matrizen, die aus den Hedgehogfelder  $A, B, C, G$  und  $H$  bestehen. Mit den Notationen

$$b_K = \sqrt{K(K+q)}, \quad c_K = 2K+1, \\ A_K = \frac{1-A(x)}{xc_K}, \quad B_K = \frac{B(x)}{xc_K}, \quad C_K = \frac{C(x)}{xc_K}, \quad G_K = \frac{G(x)}{c_K}, \quad H_K = H(x)$$

erhält man die folgende Gestalt der Matrizen:

$$\mathcal{V}_K = \begin{pmatrix} B_K(K+1) - \frac{C_K}{2} & -A_K(K+1) & A_K b_K & (B_K - C_K)b_K \\ -A_K(K+1) & B_K(K+1) - \frac{C_K}{2} & (B_K + C_K)b_K & -A_K b_K \\ A_K b_K & (B_K + C_K)b_K & -B_K K + \frac{C_K}{2} & A_K K \\ (B_K - C_K)b_K & -A_K b_K & A_K K & B_K K + \frac{C_K}{2} \end{pmatrix} \\ \mathcal{W}_K = m_F \begin{pmatrix} H_K & G_K & -2G_K b_K & 0 \\ -G_K & H_K & 0 & -G_K b_K \\ 2G_K b_K & 0 & H_K & -G_K \\ 0 & 2G_K b_K & G_K & H_K \end{pmatrix}$$

Um die Diagonalisierung auf numerischem Weg durchzuführen, muß man zunächst eine endliche Basis einführen. Das Spektrum wird dadurch diskretisiert, daß man es in einen Kasten sphärischer Symmetrie einschließt und den Hamiltonian in einer Basis sphärischer Besselfunktionen darstellt und diagonalisiert. Diese Basis wird auch als Kahana-Ripka-Basis [36, 37] bezeichnet.

Im Fall des freien Hamiltonian gilt:

$$\mathcal{H}_K^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_K & m_F \\ m_F & -\mathcal{D}_K \end{pmatrix}$$

und die Eigenwertgleichung kann analytisch gelöst werden. Die Lösung als 8-Vektor der Form (B.5) sieht folgendermaßen aus:

$$J_{K,i} = (j_{K+1}(px), j_K(px), j_K(px), j_{K-1}(px), \\ j_{K+1}(px), j_K(px), j_K(px), j_{K-1}(px)),$$

wobei  $i = 1, \dots, 8$ . Die Eigenwertgleichung erhält nun folgende Form (keine Summation über  $i$ !):

$$v_{K,i}^{(r)} = \mathcal{N} C_i^{(r)} J_{K,i}, \tag{B.8}$$

wobei für die  $C_i^{(r)}$  gilt (mit  $\epsilon = \sqrt{p^2 + m_F^2}$ )

$$C_i^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0, 0, 1, -\frac{p}{\epsilon}, 0, 0 \right), C_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{p}{\epsilon}, -1, 0, 0, 0, -\frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0 \right),$$

$$C_i^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, \frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0, 0, 1, -\frac{p}{\epsilon} \right), C_i^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, -\frac{p}{\epsilon}, -1, 0, 0, 0, -\frac{m_F}{\epsilon} \right),$$

$$C_i^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0, 0, 1, \frac{p}{\epsilon}, 0, 0 \right), C_i^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{p}{\epsilon}, -1, 0, 0, 0, \frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0 \right),$$

$$C_i^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, -\frac{m_F}{\epsilon}, 0, 0, 0, 1, \frac{p}{\epsilon} \right), C_i^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0, 0, \frac{p}{\epsilon}, -1, 0, 0, 0, \frac{m_F}{\epsilon} \right)$$

Um die Impulse für die Diagonalisierung zu erhalten, wird ein großer Radius  $R$  eingeführt, mit dessen Hilfe die Impulse  $p_n$  als Nullstellen der Besselfunktion definiert werden:

$$j_K(p_n R) = 0 \tag{B.9}$$

Ferner benötigt man einen oberen Cutoff für die Impulse in Gleichung (B.9). Diese Größe wird in dieser Arbeit mit  $z_{\max}$  bezeichnet. Die Werte  $p_n R$  sind somit alle kleiner als  $z_{\max}$ . Da die Eigenwertmatrix des Hamiltonoperators von der Anzahl der Impulse abhängt, ist es wünschenswert, diese Größe möglichst klein zu halten, um den Rechenaufwand zu minimieren. Andererseits schneidet man u. U. zu viele Impulse heraus und der numerische Fehler wird wieder größer werden.

Wenn  $\alpha_m$  und  $\alpha_n$  Nullstellen von  $j_K(z)$  sind, so gilt folgende Orthogonalitätsbedingung:

$$\int_0^1 dt t^2 j_K(\alpha_m t) j_K(\alpha_n t) = \int_0^2 dt t^2 j_{K\pm 1}(\alpha_m t) j_{K\pm 1}(\alpha_n t) = \delta_{mn} \frac{1}{2} (j_{K\pm 1}(\alpha_n))^2$$

Auf diese Art und Weise sind die 8 entarteten Eigenzustände von (B.8) orthogonal zueinander und ebenfalls orthogonal zu Zuständen mit verschiedenem  $p_N$  bei gegebenem  $K$ . Der Normierungsfaktor aus (B.8) ist

$$\mathcal{N} = \sqrt{2/R^3} |j_{K\pm 1}(p_n R)|^{-1}$$

Die Eigenzustände des gesamten Hamiltonian (B.6) können nun durch Diagonalisierung der Matrix (hier ist über  $i$  zu summieren!)

$$\mathcal{H}_K^{rs}(p_m, p_n) = \int_0^R dx x^2 v_{K,i}^{(r)}(p_m, x) \mathcal{H}_{K,ij} v_{K,j}^{(s)}(p_n, x) \quad (\text{B.10})$$

gewonnen werden.

Es ist in der Kahana-Ripka-Basis somit möglich, die Energie (2.24) auszurechnen. Um nun die renormierte Energie zu erhalten, sind die divergenten Anteile (2.28) zu bestimmen. Setzt man die Basisentwicklung ein, so folgt

$$E_{\text{div}} = \sum_{K=0}^{\infty} (2K+1) \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-tp_n^2}}{j_{K+1}^2(p_n R) R^3} \times \\ \times \int_0^R dx x^2 \sum_{i=1}^8 J_{K,i}(p_n x) \left( e^{-t(\mathcal{H}_K^2 - p_n^2)} \right)_{ii} J_{K,i}(p_n x) \Big|_{\text{div}} \quad (\text{B.11})$$

Entwickelt man nun die  $e$ -Funktion bis zur 2. Ordnung, so folgt

$$e^{-t(\mathcal{H}_K^2 - p_n^2)} = 1 - t(\mathcal{H}_K^2 - p_n^2) + \frac{t^2}{2} (\mathcal{H}_K^2 - p_n^2)^2 + \dots$$

und einsetzen in (B.11) liefert

$$E_{\text{div}} = \sum_{K=0}^{\infty} (2K+1) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-tp_n^2}}{j_{K+1}^2(p_n R) R^3} \int_0^R dx x^2 F(x) \quad (\text{B.12})$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\tilde{A} \equiv \frac{1 - A(x)}{x}, \quad \tilde{B} \equiv \frac{B(x)}{x}, \quad \tilde{C} \equiv \frac{C(x)}{x}$$

ist

---


$$\begin{aligned}
F(x) = & - \left( \delta_{K,0} \left( 2m_F^2(j_1^2 + j_0^2)(H^2 + G^2 - 1) + (j_1^2 + j_0^2) \left( \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 + \frac{\tilde{C}^2}{4} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (j_1^2 - j_0^2)(\tilde{A}' - \tilde{B}\tilde{C}) + (-3j_1^2 - j_0^2) \left( \frac{\tilde{A}}{x} \right) \right) \right. \\
& + (1 - \delta_{K,0}) \left( 2m_F^2(j_{K+1}^2 + 2j_K^2 + j_{K-1}^2)(H^2 + G^2 - 1) \right. \\
& \left. + \left( \frac{K+1}{2K+1}j_{K+1}^2 + j_K^2 + \frac{K}{2K+1}j_{K-1}^2 \right) (\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2) \right. \\
& \left. + (j_{K+1}^2 + 2j_K^2 + j_{K-1}^2) \left( \frac{\tilde{C}^2}{4} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{K+1}{2K+1}j_{K+1}^2 - j_K^2 + \frac{K}{2K+1}j_{K-1}^2 \right) (\tilde{A}' - \tilde{B}\tilde{C}) \right. \\
& \left. + \left( -\frac{(K+1)(2K+3)}{2K+1}j_{K+1}^2 - j_K^2 + \frac{K(2K-1)}{2K+1}j_{K-1}^2 \right) \left( \frac{\tilde{A}}{x} \right) \right) \Bigg) \\
& + \frac{t}{2} \left( \delta_{K,0} \left( (9j_1^2 + j_0^2) \left( \frac{\tilde{A}}{x} \right)^2 + (j_1^2 + j_0^2) \left( \frac{\tilde{B}}{x} \right)^2 \right) \right. \\
& \left. + (j_1^2 + j_0^2)\tilde{C}^2 p_n^2 + \left( -\frac{9}{4}j_1^2 - \frac{1}{4}j_0^2 \right) \left( \frac{\tilde{C}}{x} \right)^2 \right) \\
& + (1 - \delta_{K,0}) \left( \left( \frac{(K+1)(2K^2 + 7K + 9)}{2K+1}j_{K+1}^2 + (2K^2 + 2K + 1)j_K^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{K(2K^2 - 3K + 4)}{2K+1}j_{K-1}^2 \right) \left( \frac{\tilde{A}}{x} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left( (K+1)^2j_{K+1}^2 + (2K^2 + 2K + 1)j_K^2 + K^2j_{K-1}^2 \right) \left( \frac{\tilde{B}}{x} \right)^2 \right. \\
& \left. + (j_{K+1}^2 + 2j_K^2 + j_{K-1}^2)\tilde{C}^2 p_n^2 \right. \\
& \left. + \left( -\frac{8K^3 + 44K^2 + 50K + 9}{4(2K+1)}j_{K+1}^2 - \frac{4K^2 + 4K + 3}{2}j_K^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{8K^3 - 20K^2 - 14K + 5}{4(2K+1)}j_{K-1}^2 \right) \left( \frac{\tilde{C}}{x} \right)^2 \right) \Bigg) \tag{B.13}
\end{aligned}$$



## C. Massenrenormierung

Hier soll das konkrete Aussehen der Gleichungen (2.34) vorgestellt werden. Zunächst gilt auf 0-loop-Niveau

$$\begin{aligned}
S_0[A, \phi, \bar{\psi}, \psi] &= \frac{1}{g^2} \left( \frac{\nu_H^2}{8} v(v^2 - 4) \phi(0) \right. \\
&+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{2} A_\mu^a(-k) \left( \delta_{\mu\nu} \left( k^2 + \frac{v^2}{4} \right) - k_\mu k_\nu \right) A_\nu^a(k) \right. \\
&+ \frac{1}{2} \phi(-k) \left( k^2 + \frac{\nu_H^2}{8} (3v^2 - 4) \right) \phi(k) \\
&\left. \left. + \bar{\psi}(-k) \left( \gamma^\mu k_\mu + \frac{v}{2} \nu_F \right) \psi(k) \right) \right), \tag{C.1}
\end{aligned}$$

woraus man sofort mittels (2.32) die Propagatoren auf 0-loop-Niveau ablesen kann. Aus (2.33) folgen dann die Massen der Teilchen ohne Quantenkorrekturen auf 0-loop-Niveau. Da die Energieeinheit zunächst noch nicht festgesetzt ist, werden die Massen hier noch mit  $\tilde{m}_X$  ( $X = H, W, F$ ) bezeichnet. Das sich ergebende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv -\tilde{m}_H^2 + \frac{\nu_H^2}{8} (3v^2 - 4) \\
0 &\equiv -\tilde{m}_W^2 + \frac{v^2}{4} \\
0 &\equiv \frac{1}{4} \nu_F^2 v^2 - \tilde{m}_F^2 \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Der Vakuumerwartungswert  $v$  ist hier natürlich  $v = 2$ , so daß für die Massen sofort folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_H &= \nu_H \\
\tilde{m}_W &= 1 \\
\tilde{m}_F &= \nu_F \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Um nun fermionische Korrekturen auswerten zu können, ist es notwendig, die Quantenkorrektur

$$S_{\text{eff}}^{1\text{-loop}} - S_0 = -\frac{1}{2} \ln \det \mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}$$

auszurechnen und zu renormieren. Hier ist zu beachten, daß nun der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes  $v_1$  (der mittels (2.37) bestimmt wird) in den Rechnungen auf 1-loop-Niveau zu verwenden ist. Mit der bereits bekannten Proper-Time-Regularisierung folgt (im Euklidischen):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{H}^\dagger \mathcal{H} \Big|_{\text{reg}} &= \frac{1}{2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H}} - S_{\text{counter}} \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \nu_F^2 v_1 \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \frac{N_c}{2} \phi(0) \\
 &\quad + \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{-1/2}^{1/2} d\alpha \left( \phi(-k) \phi(k) \frac{N_c}{2} \left( 2\nu_F^2 \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \nu_F^2 \left( v_1^2 \nu_F^2 + k^2 \right) F'' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4} \right) \right) \right) \right) \\
 &\quad + A_\mu^a(-k) A_\nu^a(k) \left( \delta^{\mu\nu} \left( \left( \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4} + k^2 \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. F'' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4} + \frac{k^2}{4} \right) \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4} \right) \right) \right) \frac{N_c}{2} \\
 &\quad \left( N_g + \frac{1}{2} \right) N_c \left( -\nu_{\text{ren}}^2 + \frac{1}{2} k^2 F'' \left( -\frac{\alpha^2 k^2}{\nu_{\text{ren}}^2} + \frac{k^2}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{k^2}{4} \right) \right) \right) \\
 &\quad - k^\mu k^\nu \left( \left( \frac{1}{2} - 2\alpha^2 \right) \frac{N_c}{2} F'' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4} \right) \right) \right) \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} - 2\alpha^2 \right) \left( N_g + \frac{1}{2} \right) N_c F'' \left( \frac{1}{\nu_{\text{ren}}^2} \left( -\alpha^2 k^2 + \frac{k^2}{4} \right) \right) \right), \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

wobei folgende Bezeichnungen verwendet wurden:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left( \frac{3}{2} - C - \ln x \right) - x$$

$$F'(x) = -1 + x(1 - C - \ln x)$$

$$F''(x) = -C - \ln x$$

Die explizite Gestalt von  $S_{\text{counter}}$  findet man in [34]. Da nun  $S_{\text{eff}}$  bekannt ist, können mit Hilfe von (2.32) die Propagatoren bestimmt werden. Die Größe  $v_1$  ist über (2.37) zu eliminieren, wie in Kapitel 2.7 untersucht worden ist. Nach einer erneuten Wickrotation in den Minkowskiraum können durch (2.33) nun die folgenden impliziten Bestimmungsgleichungen für die physikalischen Teilchenmassen (in einer zunächst noch freien Energieeinheit) gefunden werden:

---


$$\begin{aligned}
0 &\equiv -\tilde{m}_H^2 + \frac{\nu_H^2}{8} (3v_1^2 - 4) \\
&\quad + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{N_c}{2} \left( 2\nu_F^2 \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \nu_F^2 \left( v_1^2 \nu_F^2 - \tilde{m}_H^2 \left( -C - G \left( \frac{\tilde{m}_H^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right) \right) \\
0 &\equiv -\tilde{m}_W^2 + \frac{v_1^2}{4} \\
&\quad + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{N_c}{2} \left( \nu_{\text{ren}}^2 F' \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) + \frac{v_1^2 \nu_F^2 / 2 - \tilde{m}_W^2}{2} \times \right. \right. \\
&\quad \times \left( -C - G \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) - \nu_{\text{ren}}^2 \left( -1 + (1 - C) \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} - \frac{\tilde{m}_W^2}{6\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2} G' \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) - \left( \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} - \frac{\tilde{m}_W^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left( -C - G \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, \frac{v_1^2 \nu_F^2}{4\nu_{\text{ren}}^2} \right) \right) \right) \right) \\
&\quad + N_c \left( N_g + \frac{1}{2} \right) \left( -\nu_{\text{ren}}^2 - \frac{\tilde{m}_W^2}{2} \left( -C - G \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, 0 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \nu_{\text{ren}}^2 \left( -1 + (C - 1) \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{6\nu_{\text{ren}}^2} \right) - \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2} G' \left( \frac{\tilde{m}_W^2}{\nu_{\text{ren}}^2}, 0 \right) \right) \right) \right) \\
0 &\equiv \frac{1}{4} \nu_F^2 v_1^2 - \tilde{m}_F^2 \tag{C.5}
\end{aligned}$$

mit den zusätzlichen Bezeichnungen

$$G(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} d\alpha \ln \left( x \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) + y - i\varepsilon \right)$$

$$G'(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} d\alpha \alpha^2 \ln \left( x \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) + y - i\varepsilon \right)$$

Wie man sieht, ist es in (C.5) nicht notwendig, die Fermionenmasse durch Loopkorrekturen zu modifizieren, da hier nur fermionische Loops zugelassen wurden. Fermionenpropagatoren werden aber nur durch bosonische Loops in erster Ordnung korrigiert, da es keine 3-Punkt (oder gar 4-Punkt) -Fermiondiagramme in einer renormierbaren Theorie gibt.

(C.2) bzw. (C.5) stellen nun explizite bzw. implizite Bestimmungsgleichungen für die Teilchenmassen dar. Um nun das Gleichungssystem (2.34) zu erhalten, wo ja die Massen in physikalischen Einheiten (z. B. GeV) vorgegeben werden, müssen die Massen noch

mit einem geeigneten Faktor multipliziert werden. Geben wir vor, daß  $m_W^{\text{phys}}$  die physikalische Teilchenmasse ist, so kann man mit den Ergebnissen aus (C.2) bzw. (C.5) die physikalischen Massen folgendermaßen erhalten:

$$\begin{aligned} m_W &= m_W^{\text{phys}} \\ m_H &= \frac{\tilde{m}_H}{\tilde{m}_W} m_W^{\text{phys}} \\ m_F &= \frac{\tilde{m}_F}{\tilde{m}_W} m_W^{\text{phys}} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Die Gleichungen für  $m_H$  und  $m_F$  aus (C.6) stellen das gesuchte Gleichungssystem (2.34) dar.

# Literaturverzeichnis

- [1] G. Shaw F. Mandl. *Quantum Field Theory*. John Wiley, 1991.
- [2] O. Nachtmann. *Elementarteilchenphysik*. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [3] L. Li T. Cheng. *Gauge theory of elementary particle physics*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [4] S.A. Reinhardt W. Greiner. *Theoretische Physik 7A, Feldquantisierung*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a.M., 1993.
- [5] D.R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: Ein endlos geflochtenes Band*. Klett, Cotta, 1986.
- [6] F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).
- [7] C.N. Yang, R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [8] R. Shaw, Doktorarbeit, Cambridge (1954), unpubliziert.
- [9] Peter Sieber, *The rate of baryon number violation in the electroweak theory*, Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1996).
- [10] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, *Preprint CERN-TH/96-13, LNR-913/96, hep-ph/9603208*.
- [11] D. Diakonov, M. Polyakov, P. Sieber, J. Schaldach, K. Goeke, *Phys. Rev.* **D49**, 6864 (1994).
- [12] D. Diakonov, M. Polyakov, P. Sieber, J. Schaldach, K. Goeke, *Phys. Rev.* **D53**, 3366 (1996).
- [13] J. Kunz, B. Kleihaus und Y. Brihaye, *Phys. Rev.* **D46**, 3587 (1992).
- [14] C. Campagnari, M. Franklin, *Preprint UCSB-HEP-96-01, HUTP-96/A023B436, hep-ex9608003*.
- [15] T. Akiba, H. Kikushi, T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D38**, 1937 (1988).
- [16] A. Messiah. *Quantenmechanik Bd. 1*. Walter de Gruyter, New York, 1976.
- [17] A. Ringwald, *Nucl. Phys.* **B330**, 1 (1990).

- [18] O. Espinosa, *Nucl. Phys.* **B334**, 310 (1990).
- [19] L. McLerran, A. Vainshtein, M.B. Voloshin, *Phys. Rev.* **D42**, 171 (1990).
- [20] M.P. Mattis, *Phys. Rep.* **214**, No.3 159 (1992).
- [21] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976).
- [22] Ingo Börnig, *Massenaufspaltung des schweren Fermion-Dubletts bei der Sphaleron-Barriere*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1996).
- [23] J. Kunz, Y. Brihaye, *Phys. Lett.* **B304**, 141(1993); *Phys. Rev.* **D48**, 5905 (1993).
- [24] J.B. Zuber C. Itzykson. *Quantum Field Theory*. McGraw Hill, New York, 1985.
- [25] M. Sher, *Phys. Lett.* **B317**, 159 (1993).
- [26] S.A. Teukolsky W.H. Press. *Numerical Recipes in Fortran, 2nd Edition*. Cambridge University Press, New York, 1994.
- [27] Christian Schulzky, *Korrektur der Sphaleron-Konfiguration unter Einbeziehung der fermionischen 1-loop Fluktuationen*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1996).
- [28] R.P. Brent. *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Englewood Cliffs, New York, 1973.
- [29] C. Weiss, R. Alkofer, H. Weigel, *Mod. Phys. Lett. A, Vol 8*, No. 1 (1993) 79-88.
- [30] Peter Sieber, *Solitonische Lösungen im generalisierten Nambu-Jona-Lasinio Modell*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1992).
- [31] F.R. Klinkhamer, N.S. Manton, *Phys. Rev.* **D30**, 2212 (1984).
- [32] G.D. Moore, *Phys. Rev.* **D53**, 5906 (1996).
- [33] D. Diakonov, M. Polyakov, P. Pobylitsa, P. Sieber, J. Schaldach, K. Goeke *Phys. Lett.* **B336**, 457 (1994).
- [34] Jörg Schaldach, *The sphaleron transition rate in the electroweak theory*, Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum (1996).
- [35] J.M. Moreno, D.H. Oaknin, M. Quiros, *Preprint IEM-FT-127/96*, hep-ph/9605387.
- [36] S. Kahana, G. Ripka, *Nucl. Physics.* **A429**, 962 (1984).
- [37] G. Ripka, S. Kahana, *Phys. Rev.* **D36**, 1233 (1987).

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Menschen bedanken, die mir halfen, daß ich diese Arbeit schreiben konnte. Sie haben mich in vieler Hinsicht unterstützt, sowohl bei technischen Problemen als auch moralisch, wenn mich ein Problem zu erdrücken drohte. Zunächst gilt mein Dank meinen Eltern, die mich während meiner Studienzeit stets unterstützt haben.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Klaus Goeke für die Aufgabenstellung und seine Betreuung. Er hat stets Begeisterung für das Thema gezeigt und hat mir mit aufmunternden Anregungen und Ratschlägen weiterzuhelfen gewußt. Außerordentlich motivierend hat sich ferner das gute Arbeitsklima am Lehrstuhl auf meine Arbeit und auf meine Einstellung ausgewirkt. Ferner bedanke ich mich ganz herzlich bei allen Mitgliedern des Lehrstuhles für Theoretische Physik II, die mir stets bei allen Schwierigkeiten und Problemen nach bestem Wissen geholfen haben.

Mein besonders herzlicher Dank gebührt Ingo Börnig, der immer ein offenes Ohr für meine physikalischen und computertechnischen Probleme hatte. Desweiteren danke ich Jörg Schaldach, Peter Sieber und Christian Schulzky, die mich fachlich unterstützten und mein manchmal recht launisches Verhalten ertrugen.

Ebenfalls danken möchte ich Peter Schweitzer für die Zeit, die er sich genommen hat, um meine Diplomarbeit auf Schreibfehler durchzusehen.

Wolfgang Bathelt und Peter Druck gebührt mein Dank für ihre computertechnische Unterstützung.

Die satztechnische Unterstützung von Jochen Balla hat sehr dazu beigetragen, daß diese Arbeit gut lesbar und übersichtlich wurde.

Schließlich gilt mein Dank der *Ruth und Gerd Massenbergs Stiftung*, durch deren Studienabschlußstipendium ein so frühzeitiger Abschluß dieser Arbeit ermöglicht wurde.

